IES CTEIB

Departament de Matemàtiques

Matemàtiques II

Problemes proposats en les PAU

José Luis Bernal Garcías

Curs 2016-17

Índex

Capítol 1

Límits, continuïtat i derivabilitat

1.1 Enunciats

1) **[2016JunA3]**

   Considerau la funció $f(x) = 2e^{-(x-1)} + 4x$. Calculau-ne els màxims i mínims relatius, donau-ne els intervals de creixement i decreixement i demostrau que és còncava per a tot valor de x.

2) **[2016JunB3]**

   De tots els rectangles de diagonal $6\sqrt{2}$ cm, determinau el rectangle de perímetre màxim.

3) **[2015JunA3]**

   Determinau els valors de a, b i c perquè la funció $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ passi pel punt $(1, 0)$ i tingui un màxim relatiu en $x = -1$ i un mínim relatiu en $x = 0$.

4) **[2015SetA3]**

   Donada la funció $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x + 1$, determinau el valor de c que verifica que el pendent de la recta tangent a f en $x = c$ és mínim i calculau la corresponent recta tangent de f en $x = c$.

5) **[2014JunA3]**

   Donada la funció:

   $$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & \text{si } -2 \le x \le -1, \\ \frac{x^2-3}{2}, & \text{si } -1 < x \le 0. \end{cases}$$

   a) Provau que f és contínua a l'interval $[-2, 0]$ i derivable a l'interval $(-2, 0)$.

   b) Estudiau si la funció és creixent o decreixent als intervals $(-2, -1)$ i $(-1, 0)$.

6) **[2014SetA3]**

   Sigui $f(x) = e^x \cdot \cos x$ definida en l'interval $(0, 2\pi)$.

   a) Calculau i determinau els extrems de f.

   b) Calculau i determinau els punts d'inflexió de f.

7) **[2014SetB3]**

   Donada la funció:

   $$f(x) = \begin{cases} \ln (x-1)^2 + a, & \text{si } \frac{3}{2} \le x \le 2, \\ bx^2 - 6x, & \text{si } 2 < x \le 4. \end{cases}$$

   a) Calculau a i b perquè f sigui contínua en l'interval $[\frac{3}{2}, 4]$ i derivable en l'interval $(\frac{3}{2}, 4)$.

   b) Per als valors de a i b determinats en l'apartat a), calculau els punts de l'interval $(1, 4)$ on el pendent de la recta tangent és 3.

8) **[2013JunB3]**

   Sigui la funció $f(x) = \dfrac{x^2 + x + 1}{x^2 + 1}$.

a) Calculau les asímptotes de f.

b) Calculau els extrems de f.

9) **[2013SetB3]**

Sigui la funció $f(x) = \dfrac{1}{x-1} - \dfrac{1}{x-2}$.

a) Calculau els extrems de f.

b) Estudiau quan la funció f és còncava o convexa.

10) **[2012JunA3]**

Calculau els màxims i els mínims de la funció $f(x) = \dfrac{2x+1}{x^2+2x+3}$.

11) **[2012SetB3]**

Determinau els màxims i els mínims de la funció $f(x) = \dfrac{1+x}{1+x+x^2}$.

12) **[2011JunA3]**

Considerau la funció real definida en tota la recta real per $f(x) = \dfrac{3x^2-1}{(x^2+1)^2}$.

a) Calculau $f'(x)$ i $f''(x)$ i donau els resultats completament simplificats.

b) Determinau els màxims i mínims de la funció f.

13) **[2011SetB3]**

Considerau la funció $f(x) = \dfrac{ke^x}{1+x^2}$.

a) Determinau el valor de k perquè el pendent de la recta tangent a la funció en $x = 0$ prengui el valor 3.

b) Donat el valor de k calculat en l'apartat a). estudiau-ne els intervals de creixement i decreixement.

14) **[2010JunA3]**

Calculau el punt de la corba $y = \dfrac{1}{x^2+1}$ en el qual el pendent de la recta tangent sigui màxim. Feu un dibuix on apareguin la corba, el punt i la recta tangent.

15) **[2010JunB3]**

Es considera la funció $f(x) = x \cdot |x|$. Calculau les equacions i els dominis de les funcions $f(x)$, $f'(x)$, $f''(x)$ i $f'''(x)$. Representau-les gràficament.

16) **[2010SetA3]**

Determinau els intervals de creixement i decreixement, els màxims i mínims, els punts d'inflexió i els intervals de concavitat i convexitat de la funció $f(x) = (x-3)^4(x-1)$.

17) **[2010SetB3]**

Calculau els valors dels paràmetres a, b i c de la funció $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ de manera que la funció f tingui un màxim per a $x = -1$, un mínim per a $x = 3$ i passi pel punt $(0, 5)$.

18) **[2009JunA3]**

Es considera la funció $y = f(x)$, definida en l'interval $[0, \pi]$, de la següent forma:

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x = 0, \\ \dfrac{x^2 - x}{sinx} & \text{si } 0 < x < \pi, \\ 0 & \text{si } x = \pi. \end{cases}$$

a) Estudiau-ne la continuïtat.

b) Dibuixau la funció en un entorn de $x = 0$ i de $x = \pi$.

19) **[2009JunA4]**

La recta $y = 2x - 2$ és una asímptota obliqua de la funció $f(x) = \dfrac{2x^2+1}{x+k}$. Calculau el valor de k i els extrems relatius d'aquesta funció.

20) **[2009SetA3]**

Es considera la funció $f(x) = \sqrt{1+x+x^2}$.

a) Calculau els extrems relatius de f.

b) Calculau $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x)$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f'(x)$.

21) **[2009SeptB3]**

Calculau els punts de la corba $\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{2} = 1$ en els quals el pendent de la recta tangent és 1.

22) **[2009SeptB4]**

Considerau la funció:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0, \\ x \cdot \ln x & \text{si } x > 0. \end{cases}$$

a) Estudiau-ne la continuïtat.

b) Calculau l'àrea de la regió limitada per la corba $y = f(x)$ i les rectes $y = 0$, $x = k$ i $x = 1$, on k és l'abscissa del mínim de la funció. Feu un dibuix de la regió.

23) **[2008JunA3]**

Es considera la funció $f(x) = \dfrac{x}{(x-1)^2}$.

a) Calculau $\lim\limits_{x\to1} f(x)$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

b) Demostrau que és creixent en l'interval obert $(-1, 1)$.

c) Determinau els extrems relatius.

d) Feu un dibuix de la funció.

24) **[2008JunB3]**

Es considera la funció $f(x) = \dfrac{x}{x^2-1}$.

a) Calculau $\lim\limits_{x\to-1} f(x)$, $\lim\limits_{x\to1} f(x)$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

b) Demostrau que no té extrems relatius.

c) Demostrau que té un punt d'inflexió en $x = 0$.

d) Feu un dibuix de la funció.

25) **[2008SetA3]**

Es considera la funció $f(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$.

a) Calculau $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

b) Calculau els extrems relatius.

c) Feu un dibuix de la funció.

26) **[2008SetB3]**

Es considera la funció $f(x) = \dfrac{x^2}{x-1}$.

a) Calculau $\lim\limits_{x\to1} f(x)$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

b) Calculau els extrems relatius.

c) Feu un dibuix de la funció.

27) **[2007JunA3]**

Demostrau que la corba $f(x) = x - 2\cos x$ té un punt d'inflexió en l'interior de l'interval $[0, \pi]$ i trobau l'equació de la recta tangent a la corba en aquest punt. Feu un dibuix en un entorn del mateix punt.

28) **[2007JunB3]**

L'anul·lació de la primera derivada és una condició necessària perquè una funció (derivable) presenti un extrem local. Aquesta condició, però, no és suficient. Demostrau amb un exemple la segona afirmació. En aquest mateix context, què podem dir sobre l'existència d'un punt d'inflexió?

29) **[2007SetA3]**

Es considera la funció $f(x) = \dfrac{(x+1)^2}{e^x}$. Trobau-li els extrems locals i els punts d'inflexió. Feu una gràfica aproximada d'aquesta funció.

30) **[2007SetB3]**

La recta $y = 2x - 1$ és una asímptota obliqua de la funció $f(x) = \dfrac{2x^2 - 1}{x + k}$. Trobau el valor de k i, si escau, els extrems locals.

31) **[2006JunA3]**

Demostrau que la funció $f(x) = x^4 - x^3 + x^2 - x + 1$ no té cap punt d'inflexió. Cercau l'equació de la recta tangent a la corba en el punt d'abscissa $x = x_0$, on x_0 és el valor de x que fa mínima la funció $y = f''(x)$.

32) **[2006JunA4]**

Cercau els extrems relatius de la funció $f(x) = \dfrac{(x+1)^2}{e^x}$. Calculau $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} f(x)$ i $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x)$. Feu una gràfica aproximada d'aquesta funció.

33) **[2006JunB1]**

Es considera la funció $f(x) = ae^{x^2+bx+c}$. Calculau els paràmetres a. b i c sabent que la funció té un mínim relatiu en el punt $(1, a)$ i $f(0) = 1$.

34) **[2006SetA4]**

Una funció polinòmica de tercer grau, quants extrems relatius pot tenir com a màxim? Què podem dir dels punts d'inflexió? Raonau les respostes i donau exemples aclaridors.

35) **[2006SetB3]**

Es considera la funció $f(x) = e^x(x - k)$. Demostrau que, per a qualsevol valor de k, la funció presenta un únic extrem relatiu. Feu una gràfica de la funció si sabem que $f(0) = 1$.

36) **[2005JunA3]**

Es considera la funció $f(x) = \dfrac{\ln x}{x^n}$, on n és un enter positiu. Es demana:

a) Trobau els extrems relatius d'aquesta funció.
b) Calculau $\displaystyle\lim_{x\to0} f(x)$ i $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x)$.
c) Feu una gràfica de la funció en el cas $n = 2$.

37) **[2005JunB3]**

Es considera la funció $f(x) = \dfrac{x^2}{e^x}$. Es demana:

a) Trobau els extrems relatius d'aquesta funció.
b) Calculau $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} f(x)$ i $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x)$.
c) Feu una gràfica de la funció.

38) **[2005SetA1]**

Es considera la funció $f(x) = \dfrac{x^2 - 3}{x^2 - 4}$. Es demana:

a) Trobau els intervals on aquesta funció és creixent i on és decreixent.

b) Calculau les asímptotes.

c) Feu una gràfica de la funció.

39) **[2005SetA2]**
Trobau els extrems relatius de la funció $f(x) = x^3 e^{-x}$. Calculau també $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)$ i $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$.

1.2 Solucions

1) $f(x) = 2e^{-x+1} + 4x$ és contínua en tots els punts.
$f'(x) = -2e^{-x+1} + 4$. $f'(x) = 0 \Rightarrow x = 1 - \ln 2$.
$f''(x) = 2e^{-x+1}$. $f''(1 - \ln 2) = 4 > 0 \Rightarrow f$ té un míim relatiu en $x = 1 - \ln 2$.
$f''(x) = 0$ no té cap solució $\Rightarrow f$ no té cap punt d'inflexió.
$f''(0) = 2e > 0 \Rightarrow f$ és còncava en tots els punts.

2) Siguin a i b les dimensions dels rectangle de diagonal $6\sqrt{2}$ cm. Aplicant el teorema de Pitàgores obtenim $b = \sqrt{72 - a^2}$, de manera que el perímetre del rectangle ve determinat per la funció:

$$P(a) = 2a + 2b = 2a + 2\sqrt{72 - a^2},$$

amb domini $a \in (0, \sqrt{72})$ i de la qual volem trobar el seu màxim.
$P'(a) = 2 - \dfrac{2a}{\sqrt{72 - a^2}}$. $P'(a) = 0 \Rightarrow a = 6$.
Es comprova que en $a = 6$ P té un màxim relatiu. Per tant el rectangle de diagonal $6\sqrt{2}$ cm que té el perímetre màxim és el quadrat de costat 6 cm.

3) $f(x) = x^3 + \frac{3}{2}x^2 - \frac{5}{2}$.

4) Hem de trobar el mínim de la funció derivada.
Considerem la funció $g(x) = f'(x) = 3x^2 - 6x + 2$ i calculem el mínim.
$g'(x) = 6x - 6$. $g'(x) = 0 \Rightarrow x = 1$. Es comprova que en efecte en $x = 1$ la funció g té el seu mínim.
Per tant, el punt de la funció $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x + 1$ que té recta tangent amb pendent mínim és el $(1, 1)$.
L'equació de la recta tangent en aquest punt és $y = -x + 2$.

5) a) f és contínua i derivable en els intervals $(-2, -1)$ i $(-1, 0)$ perquè en cada un d'ells està definida per funcions que són contínues i derivables.
Per altra banda, f és contínua per la dreta en $x = -2$ i contínua per l'esquerra en $x = 0$. (Per què?)
Només queda estudiar la continuïtat i derivabilitat en el punt $x = -1$.
f és contínua en $x = -1$ perquè $\lim\limits_{x\to -1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to -1^+} f(x) = f(-1) = -1$.
f és derivable en $x = -1$ perquè $\lim\limits_{x\to -1^-} f'(x) = \lim\limits_{x\to -1^+} f'(x) = -1$.

b) Hem d'estudiar el signe de f' en cada un dels intervals.
Si $x \in (-2, -1)$: $f'(x) = -\dfrac{1}{x^2} < 0 \quad \Rightarrow \quad f$ decreixent en l'interval $(-2, -1)$.
Si $x \in (-1, 0)$: $f'(x) = x < 0 \quad \Rightarrow$ f decreixent en l'interval $(-1, 0)$.

6) És una funció contínua perquè és el producte de dues funcions contínues.

a) $f'(x) = e^x(\cos x - \sin x)$. $f'(x) = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{4}, x = \frac{5\pi}{4}$.
f té un màxim en el punt $\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot e^{\frac{\pi}{4}}\right)$.
f té un mínim en el punt $\left(\frac{5\pi}{4}, -\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot e^{\frac{5\pi}{4}}\right)$.

b) $f''(x) = -2e^x \sin x$. $f''(x) = 0 \Rightarrow x = \pi$.
f té un punt d'inflexió en el punt $(\pi, -e^{\pi})$.

7) a) f és contínua i derivable en els intervals $(\frac{3}{2}, 2)$ i $(2, 4)$ perquè en cada un d'ells està definida per funcions que són contínues i derivables. Només queda estudiar la continuïtat i derivabilitat en el punt $x = 2$.
f contínua en $x = 2 \quad \Leftrightarrow \quad \lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = f(2) \quad \Leftrightarrow \quad a = 4b - 12$.
f derivable en $x = 2 \quad \Leftrightarrow \quad \lim\limits_{x\to 2^-} f'(x) = \lim\limits_{x\to 2^+} f'(x) \quad \Leftrightarrow \quad 4b - 6 = 2$.
Resolent el sistema format per les dues equacions anteriors resulta que $a = -4$ i $b = 2$.

b) Hem de resoldre l'equació $f'(x) = 3$.
Si $x \in (\frac{3}{2}, 2)$: $f'(x) = 3 \quad \Rightarrow \quad \dfrac{2}{x-1} = 3 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{5}{3}$.
Si $x \in (2, 4)$: $f'(x) = 3 \quad \Rightarrow \quad 4x - 6 = 3 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{9}{4}$.

8) És una funció racional, continua en tots els punts perquè el denominador no s'anul·la mai.

a) Asímptotes verticals: No en té perquè la f és contínua.
Asímptotes horitzontals: $\lim\limits_{x\to\infty} = 1 \Rightarrow y = 1$ és A.H.
Asímptotes oblíqües: No en té perquè té d'horitzontals.

b) $f'(x) = \frac{1-x^2}{(x^2+1)^2}$. $f'(x) = 0 \Rightarrow x = \pm 1$.
f té un mínim en el punt $(-1, \frac{1}{2})$ i un màxim en el punt $(1, \frac{3}{2})$.

9) És una funció racional, discontinua en $x = 1$ i $x = 2$.

a) $f'(x) = \frac{1}{-(x-1)^2} + \frac{1}{(x-2)^2}$. $f'(x) = 0 \Rightarrow x = \frac{3}{2}$.
f té un mínim en el punt $(\frac{3}{2}, 4)$.

b) $f''(x) = \frac{2}{(x-1)^3} - \frac{2}{(x-2)^3}$. $\quad f''(x) = 0$ no té solució $\Rightarrow$ no té cap punt d'inflexió.
f és convexa en la regió $(-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$ i còncava en l'interval $(-1, 1)$.

10) És una funció racional, continua en tots els punts perquè el denominador no s'anul·la mai.
$f'(x) = \frac{-2x^2-2x+4}{(x^2+2x+3)^2}$. $\quad f'(x) = 0 \Rightarrow x = -2,\ x = 1$.
f té un mínim en el punt $(-2, -1)$ i un màxim en el punt $(1, \frac{1}{2})$.

11) És una funció racional, continua en tots els punts perquè el denominador no s'anul·la mai.
$f'(x) = \frac{-x^2-2x}{(x^2+x+1)^2}$. $\quad f'(x) = 0 \Rightarrow x = -2,\ x = 0$.
f té un mínim en el punt $(-2, -\frac{1}{3})$ i un màxim en el punt $(0, 1)$.

12) És una funció racional, continua en tots els punts perquè el denominador no s'anul·la mai.

a) $f'(x) = \frac{2x(-3x^2+5)}{(x^2+1)^3}$. $\quad f''(x) = \frac{2(9x^4-34x^2+5)}{(x^2+1)^4}$.

b) $f'(x) = 0 \Rightarrow x = -\sqrt{\frac{5}{3}},\ x = 0,\ x = \sqrt{\frac{5}{3}}$.

f té un mínim en el punt $(0, -1)$ i dos màxim en els punts $(-\sqrt{\frac{5}{3}}, \frac{9}{16})$ i $(\sqrt{\frac{5}{3}}, \frac{9}{16})$.

13) És una funció continua en tots els punts perquè el denominador no s'anul·la mai.

a) $f'(x) = \frac{ke^x(x-1)^2}{(x^2+1)^2}$.
$f'(3) = 0 \Rightarrow k = 3$.

b) Es veu que $f'(x) \geq 0$ per a qualsevol valor de x $\Rightarrow$ f és creixent en tots els punts.

14) Hem de trobar el màxim de la funció derivada.
Considerem la funció $g(x) = f'(x) = \frac{-2x}{(x^2+1)^2}$ i calculem el màxim.
$g'(x) = \frac{6x^2-2}{(x^2+1)^3}$. $\quad g'(x) = 0 \Rightarrow x = \pm\sqrt{\frac{1}{3}}$. En $x = -\sqrt{\frac{1}{3}}$ la funció g té el seu màxim.
El punt de la corba $y = \frac{1}{x^2+1}$ que té pendent màxim és $(-\sqrt{\frac{1}{3}}, \frac{3}{4})$.

15) $f(x) = x \cdot |x| = \begin{cases} -x^2, & \text{si } x < 0; \\ x^2, & \text{si } x \geq 0. \end{cases} \Rightarrow$ Domini de f: $x \in \mathbb{R}$.

$f'(x) = \begin{cases} -2x, & \text{si } x < 0; \\ 2x, & \text{si } x \geq 0. \end{cases} \Rightarrow$ Domini de f': $x \in \mathbb{R}$.

$f''(x) = \begin{cases} -2, & \text{si } x < 0; \\ \text{no definida}, & \text{si } x = 0; \\ 2, & \text{si } x > 0. \end{cases} \Rightarrow$ Domini de f'': $x \in \mathbb{R} - \{0\}$.

$f'''(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x \neq 0; \\ \text{no definida}, & \text{si } x = 0 \end{cases} \Rightarrow$ Domini de f''': $x \in \mathbb{R} - \{0\}$.

16) a) $f'(x) = (x-3)^3(5x-7)$. $\quad f'(x) = 0 \Rightarrow x = 3,\ x = \frac{7}{5}$.
f és creixent en la regió $(-\infty, \frac{7}{5}) \cup (3, +\infty)$ i decreixent en l'interval $(\frac{7}{5}, 3)$.
f té un màxim en el punt $(\frac{7}{5}, \frac{8192}{3125})$ i un mínim en el punt $(3, 0)$.

b) $f''(x) = (x-3)^2(20x-36)$. $\quad f''(x) = 0 \Rightarrow x = 3,\ x = \frac{9}{5}$. Només $x = 3$ pot ser PI (per quin motiu?).
f és convexa en l'interval $(-\infty, \frac{9}{5})$ i còncava en l'interval $(\frac{9}{5}, +\infty)$.
f té un punt d'inflexió en $(\frac{9}{5}, \frac{5184}{3125})$.

17) $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 5$.

18) És contínua en $x = 0$ perquè $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = -1 = f(0)$.
No és contínua en $x = \pi$ perquè $\lim\limits_{x \to \pi^-} f(x) = +\infty \neq f(\pi)$.
Per tant, f és contínua en l'interval $[0, \pi)$.

19) $k = 1$.
$f'(x) = \frac{2x^2+4x-1}{(x+1)^2}$. $\quad f'(x) = 0 \Rightarrow x = \frac{-2\pm\sqrt{6}}{2}$.
f té un mínim en el punt $(0.22, 0.86)$ i un maxim en el punt $(-2.22, -8.90)$, aproximadament.

20) a) $f'(x) = \frac{2x+1}{2\sqrt{1+x+x^2}}$. $\quad f'(x) = 0 \Rightarrow x = -\frac{1}{2}$.

f té un mínim en el punt $(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$.

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x \to +\infty} f'(x) = 1$, $\lim\limits_{x \to -\infty} f'(x) = -1$.

21) Aïllant y: $y = f(x) = \pm\sqrt{2 - \frac{x^2}{2}}$.
$f'(x) = \mp\frac{x}{2\sqrt{2-\frac{x^2}{2}}}$. $\quad f'(x) = 1 \Rightarrow x = \pm\sqrt{\frac{8}{3}}$.

En punts de la corba on el pendent de la recta tangent és 1 són $\left(\sqrt{\frac{8}{3}}, -\sqrt{\frac{2}{3}}\right)$ i $\left(-\sqrt{\frac{8}{3}}, \sqrt{\frac{2}{3}}\right)$.

22) a) És contínua si $x > 0$ perquè és el producte de dues funcions contínues.
És contínua en $x = 0$ perquè $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = 0 = f(0)$.
Per tant, f és contínua en l'interval $[0, +\infty)$.
b) $f'(x) = 1 + \ln x$. $\quad f'(x) = 0 \Rightarrow x = e^{-1}$.
f té un mínim en el punt $(e^{-1}, -e^{-1})$.
$\int x \ln x \, dx = \frac{1}{2}x^2(-\frac{1}{2} + \ln x) + k$.
$A = \left|\frac{3-e^2}{4e^2}\right| \approx 0.15 \text{ u}^2$.

23) És una funció racional, discontinua en $x = 1$.
a) $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = 0^-$, $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = 0^+$.
b)
c) $f'(x) = \frac{-x-1}{(x-1)^3}$. $\quad f'(x) = 0 \Rightarrow x = -1$.
f té un mínim en el punt $(-1, -\frac{1}{4})$.

24) És una funció racional, discontinua en $x = -1$, $x = 1$.
a) $\lim\limits_{x\to -1^-} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x\to -1^+} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = 0^-$, $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = 0^+$.
b) $f'(x) = \frac{-x^2-1}{(x^2-1)^2}$. $\quad f'(x) = 0$ no té solucions $\Rightarrow f$ no té extrems relatius.
c) $f''(x) = \frac{2x(x^2+3)}{(x^2-1)^3}$. $\quad f''(x) = 0 \Rightarrow x = 0$.
f té un punt d'inflexió en el punt $(0, 0)$.

25) És una funció racional, contínua en tots els punts perquè el denominador no s'anul·la mai.
a) $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = 0^-$, $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = 0^+$.
b) $f'(x) = \frac{1-x^2}{(x^2+1)^2}$. $\quad f'(x) = 0 \Rightarrow x = \pm 1$.
f té un mínim en el punt $(-1, -\frac{1}{2})$ i un màxim en el punt $(1, \frac{1}{2})$.

26) És una funció racional, discontinua en $x = 1$.
a) $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$.
b) $f'(x) = \frac{x^2-2x}{(x-1)^2}$. $\quad f'(x) = 0 \Rightarrow x = 0$, $x = 2$.
f té un màxim en el punt $(0, 0)$ i un mínim en el punt $(2, 4)$.

27) $f''(x) = 2\cos x$. $\quad f''(x) = 0$ i $x \in [0.\pi] \Rightarrow x = \frac{\pi}{2}$.
f té un punt d'inflexió en el punt $(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.
Equació de la recta tangent en el punt $(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$: $y = 3x - \frac{\pi}{2}$.

28) Sigui $f(x) = x^3$. Es compleix que $f'(0) = 0$ però en $x = 0$ la funció no té ni un màxim ni un mínim, sinó que té un punt d'inflexio.
Anàlogament, l'anul·lació de la segona derivada en un punt és una condició necessària perquè la funció tingui un punt d'inflexió en aquest punt, però la condició no és suficient. Un contraexemple el dóna la funció $f(x) = x^4$. Es compleix que $f''(0) = 0$ però en $x = 0$ la funció no té cap punt d'inflexió, sinó que té un mínim.

29) És una funció contínua en tots els punts perquè el denominador no s'anul·la mai.
$f'(x) = \frac{1-x^2}{e^x}$. $\quad f'(x) = 0 \Rightarrow x = \pm 1$.
f té un mínim en el punt $(-1, 0)$ i un màxim en el punt $(1, \frac{4}{e})$.
$f''(x) = \frac{x^2-2x-1}{e^x}$. $\quad f''(x) = 0 \Rightarrow x = 1 \pm \sqrt{2}$.
f té dos punts d'inflexió, en $x = 1 \pm \sqrt{2}$ amb coordenades aproximades $(-0.41, 0.52)$ i $(2.41, 1.04)$.

30) $k = \frac{1}{2}$. L'expressió de la funció queda $f(x) = \frac{4x^2-2}{2x+1}$.
$f'(x) = \frac{8x^2+8x+4}{(2x+1)^2}$. $\quad f'(x) = 0$ no té solucions $\Rightarrow f$ no té extrems relatius.

31) $f''(x) = 12x^2 - 6x + 2$. $\quad f''(x) = 0$ no té solució $\Rightarrow f$ no té cap punt d'inflexió.
Sigui $g(x) = f''(x) = 12x^2 - 6x + 2$. Hem de trobar el punt on g presenta el seu valor mínim.
$g'(x) = 24x - 6$. $\quad g'(x) = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{4}$.
Equació de la recta tangent a f en el punt $\left(\frac{1}{4}, \frac{205}{256}\right)$: $160x + 256y = 245$.

32) És una funció contínua en tots els punts perquè el denominador no s'anul·la mai.
$f'(x) = \frac{1-x^2}{e^x}$. $\quad f'(x) = 0 \Rightarrow x = \pm 1$.
f té un mínim en el punt $(-1, 0)$ i un màxim en el punt $(1, \frac{4}{e})$.
$\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = 0^+$.

33) $f(x) = \frac{1}{e}e^{x^2-2x+1} = e^{x^2-2x}$.

34) Sigui $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ una funció polinòmica de tercer grau.
Els extrems relatius de f es troben entre les solucións de l'equació $f'(x) = 0$; en el nostre cas $3ax * 2 + 2bx + c = 0$. Com que una equació de segon grau té com a màxim dues solucions, deduïm que f té com a màxim dos extrems relatius.
Els punts d'inflexió de f es troben entre les solucións de l'equació $f''(x) = 0$; en el nostre cas $6ax + 2b = 0$. Com que una equació de primer grau té una solució, deduïm que f té exactament un punt d'inflexió.

35) És una funció contínua en tots els punts perquè és el producte de dues funcions contínues.
$f'(x) = e^x(x - k + 1)$. $\quad f'(x) = 0 \Rightarrow x = k - 1$.
$f''(x) = e^x(x - k + 2)$. $\quad f''(k-1) = e^{k-1} > 0 \Rightarrow f$ té un únic extrem relatiu, concretament un mínim i és troba en el punt d'abscissa $x = k - 1$.

Capítol 2

Teoremes de Bolzano i de Rolle

2.1 Enunciats

1. **[2015JunB3]**

   a) Demostrau que $x = 0$ és l'única solució de l'equació $5x^9 + 3x^5 + 7x = 0$.

   b) Demostrau que $x = 0$ és l'única solució de l'equació $e^x = 1 + x$.

2. **[2015SetB3]**

   Demostrau que existeix un únic valor $x > 0$ solució de l'equació $x^2 - e^{-x} = 0$.

3. **[2014JunB3]**

   a) Calculau el valor de a perquè la funció

   $$f(x) = \begin{cases} 1 - \cos x & \text{si } x \leq 0, \\ x^2 + ax & \text{si } x > 0. \end{cases}$$

   verifiqui el teorema de Rolle a l'interval $\left[-\frac{\pi}{2}, 1\right]$.

   b) Considerant el valor de a determinat a l'apartat anterior, trobau el valor $c \in \left(-\frac{\pi}{2}, 1\right)$ tal que $f'(c) = 0$.

4. **[2013JunA3]**

   Considerem la funció $f(x) = \dfrac{\sin x}{\frac{1}{2} + \cos x}$.

   a) Verificau que $f(0) = f(\pi) = 0$.

   b) Comprovau que l'equació $f'(x) = 0$ no té cap solució en l'interval $(0, \pi)$.

   c) Explicau per què no es pot aplicar el teorema de Rolle en aquest cas.

5. **[2013SetA3]**

   Sigui la funció $f(x) = \sin(2x) - x$. Demostreu que la funció $f(x)$ té exactament tres zeros en l'interval $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

6. **[2012JunB3]**

   Sigui a un nombre real tal que $-1 < a < 1$. Definim la funció $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + ax^2 + x - 3$. Demostrau que la funció anterior només s'anul·la per a un valor de x.

7. **[2012SetA3]**

   Sigui a un nombre real positiu. Definim la funció $f(x) = x^3 + ax + 1$.

   a) Demostrau que l'equació $f(x) = 0$ només pot tenir com a màxim una solució.

   b) Demostrau que la solució de l'apartat anterior existeix i està entre -1 i 0.

8. **[2011JunB3]**

   Considerau l'equació $x^3 + \lambda x^2 - 2x = 1$, on λ és una constant més gran que 2. Fent servir el teorema de Bolzano i el de Rolle, provau que l'equació admet una única solució no negativa i més petita que 1.

9. **[2011SetA3]**

   Demostrau que la funció $f(x) = x^3 - 3x + \sqrt{2}$ no pot tenir dues arrels en l'interval $[0, 1]$. Quantes arrels té en aquest interval?

10. **[2010SetB4]**

    Utilitzant els teoremes de Bolzano i de Rolle, provau que l'equació $\operatorname{tg} x = 2x$ té una única arrel real a l'interval $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

11. **[2009JunB3]**

    Provau raonadament que l'equació $x^3 - 3x + 1 = 0$ té una única solució dins l'interval $(1, 2)$. Calculau-la amb un error menor que una dècima.

12. **[2009SetA4 - 2006SetA3]**

    Utilitzant els teoremes de Bolzano i de Rolle, demostrau que l'equació $x^2 = x \cdot \sin x + \cos x$ té exactament dues solucions en l'interval $[-\pi, \pi]$.

13. **[2007SepB4]**

    Utilitzant els teoremes de Bolzano i de Rolle, demostrau que les corbes $y = \cos x$ i $y = \sqrt{x}$ es tallen en un únic punt.

14. **[2005JunA4]**

    Enunciau el teorema de Rolle. Demostrau que la funció $f(x) = x^3 - x + a$ compleix les hipòtesis d'aquest teorema en l'interval $[0, 1]$ qualsevol que sigui el valor de a. Trobau el punt en el qual es compleix la tesi.

15. **[2005SetA4]**

    Demostrau que l'equació $x^3 + x^2 + x - 1 = 0$ té una única solució real.

16. **[2004JunB3]**

    Enunciau el teorema de Rolle. Demostrau mitjançant un exemple que la condició de què la funció és derivable en tot punt de l'interval obert (a, b) no és supèrflua i no pot fallar la derivabilitat ni tan sols en un punt.

17. **[2004SetB3]**

    Enunciau el teorema de Bolzano. Donau un exemple que demostri que perquè es compleixi el teorema de Bolzano necessitam la continuïtat de la funció en tot l'interval tancat $[a, b]$.

18. **[2003JunB3]**

    Es considera l'equació $x^3 + x^2 + mx - 6 = 0$. Utilitzant el teorema de Bolzano, demostrau:

    a) Si $m > -3$ llavors l'equació té almenys una arrel real menor que 2.

    b) Si $m < -3$ llavors l'equació té almenys una arrel real major que 2.

19. **[2003SetA3]**

    Enunciau el teorema de Bolzano. Aplicau-ho per demostrar que l'equació $x = \cos x$ té almenys una solució en l'interval $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

20. **[2002JunA3]**

    Enunciau el teorema de Bolzano. Podem aplicar aquest teorema a la funció $f(x) = \sin 2x + \cos 3x$ si l'interval és $[0, \pi]$? Trobau, si existeix, un punt de l'interval $[0, \pi]$ en el qual s'anul·la aquesta funció.

21. **[2002SetA3]**

    Enunciau el teorema de Rolle. Aplicau-lo, si és possible, a la funció $f(x) = \sin x \cdot \cos x$ si l'interval és $[0, \pi]$, donant el punt $\alpha \in (0, \pi)$ per al qual $f'(\alpha) = 0$.

22. **[2001JunyB2]**

    Demostrau que l'equació $x^7 + x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x = 1$ té una única arrel positiva.

23. **[2001SetA1]**

    Demostrau que, per a qualsevol valor de m, l'equació $x^3 - 3x + m = 0$ no té dues arrels diferents en l'interval $[0, 1]$.

24. **[2001SetB1]**

    Demostrau que existeix almenys un nombre real x per al qual es verifica $\sin x = x - 2$.

25. **[2000JunB2]**

    Comprovau que es verifiquen les hipòtesis del teorema de Rolle per a la funció $f(x) = 3\cos^2 x$ en l'interval $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$. Calculau també el valor al qual es refereix la tesi del teorema.

26. **[2000SetA2]**

    Es considera la funció $f(x) = \operatorname{arctg} x$. Demostrau que existeix almenys un nombre $x \in (0,1)$ tal que $f'(x) = x$.

27. **[2000SetB3]**

    Enunciau el teorema de Rolle. Podem aplicar aquest teorema a la funció $f(x) = e^{x^2-1}$ si l'interval és $[-1,1]$? Per a quin valor α és $f'(\alpha) = 0$?

28. **[1999JunB1]**

    Enunciau el teorema de Rolle. Podem aplicar aquest teorema a la funció $f(x) = |\sin x|$ si l'interval és $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$?

29. **[1998SetB2]**

    Demostrau que l'equació $x^5 + x^3 + x + 1 = 0$ té una única arrel dins l'interval $[-1, 0]$.

Capítol 3

Integració de funcions

3.1 Enunciats

1. **[2016JunA4]**

   Calculau la següent integral indefinida: $\displaystyle\int (x^2+1)\ln x \, dx.$

2. **[2016JunB4]**

   Considerem les funcions $f(x) = x^3$ i $g(x) = 3x^2 - 4$. Feu un dibuix aproximat de les funcions anteriors per a $x \in [-3, 3]$. Calculau l'àrea limitada per les gràfiques de les funcions anteriors.

3. **[2015JunA4]**

   Calculau la següent integral indefinida: $\displaystyle\int \frac{2x+5}{(x+3)^3}\, dx.$

4. **[2015JunB4]**

   Feu un dibuix aproximat de les corbes $y = 6x - x^2$ i $y = x^2 - 2x$, i indicau els punts on es tallen. Calculau l'àrea del recinte limitat per les dues corbes anteriors.

5. **[2015SetA4]**

   Feu un dibuix aproximat de les corbes $y = 3x - x^2$ i $y = x - 3$ i indicau els punts on es tallen. Calculau l'àrea del recinte limitat per les dues corbes anteriors.

6. **[2015SetB4]**

   Calculau la següent integral indefinida: $\displaystyle\int \frac{x-2}{x^2+x}\, dx.$

7. **[2014JunA4]**

   Calculau la següent integral indefinida: $\displaystyle\int \frac{x^3}{x^2+1}\, dx.$

8. **[2014JunB4]**

   Feu un dibuix del recinte limitat per la corba $y(x) = \cos x$, l'eix OX i les rectes verticals $x = -\frac{\pi}{2}$ i $x = \frac{\pi}{2}$. Calculau l'àrea d'aquest recinte.

9. **[2014SetA4]**

   Feu un dibuix del recinte limitat per la corba $x \cdot y = 36$, l'eix OX i les rectes verticals $x = 6$ i $x = 12$. Calculau l'àrea d'aquest recinte.

10. **[2014SetB4]**

    Calculau la següent integral indefinida: $\displaystyle\int \frac{x}{(x-1)^2}\, dx.$

11. **[2013JunA4]**

    Feu un dibuix del recinte limitat per la corba $y_1(x) = \dfrac{1}{x}$, $y_2(x) = 4x$ i $y_3(x) = \dfrac{1}{4}x$, per als valors de x positius. Calculau l'àrea d'aquest recinte.

12. **[2013JunB4]**

    Calculau la següent integral indefinida: $\displaystyle\int \frac{x^3}{x^2-5x+6}\,dx.$

13. **[2013SetA4]**

    Feu un dibuix del recinte limitat per les corbes $y_1(x) = 4 - x^2$, $y_2(x) = x^2$. Calculau l'àrea d'aquest recinte.

14. **[2013SetB4]**

    Calculau la següent integral indefinida $\displaystyle\int \frac{x-1}{x^3+x^2}\,dx.$

15. **[2012JunA4]**

    Feu un dibuix del recinte limitat per la corba $f(x) = \dfrac{x}{x^2+3}$ entre els valors $x = 0$, $x = 1$ i l'eix OX. Calculau l'àrea d'aquest recinte.

16. **[2012JunB4]**

    Calculau la següent integral indefinida: $\displaystyle\int x \cdot \sqrt[3]{4+x^2}\,dx.$

17. **[2012SetA4]**

    Feu un dibuix del recinte limitat per la corba $f(x) = \dfrac{x^2}{x+2}$ entre els valors $x = -1$, $x = 1$ i l'eix OX. Calculau l'àrea d'aquest recinte.

18. **[2012SetB4]**

    Calculau la següent integral indefinida: $\displaystyle\int \frac{1}{2x^2+4}\,dx.$

19. **[2011JunA4]**

    Donada la funció $f(x) = \dfrac{x^3}{\sqrt{x^4+1}}$,

    a) Calculau $F(x)$ tal que $F'(x) = f(x)$ per a tot x.

    b) Calculau la integral: $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^3}{\sqrt{x^4+1}}\,dx.$

20. **[2011JunB4]**

    Sigui $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{2}{3+\sqrt{x}}.$

    a) Expressau I aplicant el canvi de variable $x = t^2$.

    b) Calculau el valor de I.

21. **[2011SetA4]**

    Calculau l'àrea de la regió limitada per les paràboles $y^2 = 4x$ i $x^2 = 4y$. Feu un dibuix aproximat de la figura.

22. **[2011SetB4]**

    Calculau la integral: $\displaystyle\int \ln(x+1)\,dx.$

23. **[2010JunA4]**

    Calculau l'àrea de la regió limitada per la hipèrbola $xy = 4$ i la recta que la talla en els punts d'abscisses $x = 1$ i $x = 4$. Feu un dibuix de la regió.

24. **[2010JunB4]**

    Sigui $A(t)$, $t > 0$, l'àrea de la regió limitada per la corba $y = \sqrt[3]{x^2}$ i les rectes $y = 0$, $x = t$. Representau gràficament aquesta regió i calculau el valor de t per al qual $A(t) = 1$.

25. **[2010SetA4]**

    Feu un dibuix del recinte limitat per les paràboles $y = 6x - x^2$ i $y = x^2 - 2x$. Calculau l'àrea d'aquest recinte.

26. **[2009JunB4]**

    Calculau l'àrea de la regió limitada per la corba $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$ i les rectes $y = 0$, $x = a$ i $x = b$, on a i b són les abscisses dels punts d'inflexió de la corba. Feu un dibuix de la regió.

27. **[2009SetB4]**

    Donada la funció:

    $$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0, \\ x \cdot \ln x & \text{si } x > 0. \end{cases}$$

    a) Estudiau-ne la continuïtat.

    b) Calculau l'àrea de la regió limitada per la corba $y = f(x)$ i les rectes $y = 0$, $x = k$ i $x = 1$, on k és l'abscissa del mínim de la funció. Feu un dibuix de la regió.

28. **[2008JunA4]**

    Es considera la funció

    $$A(t) = \int_0^1 \frac{1}{1+x},\ t > 0.$$

    Feu una interpretació geomètrica (en termes d'àrea) d'aquesta funció. Calculau una fórmula més explícita per a la funció $A(t)$ i representau-la gràficament.

29. **[2008JunB4]**

    Calculau l'àrea del recinte limitat per la corba $y = \dfrac{1}{1+x^2}$ i les rectes $y = 0$, $x = -1$ i $x = 1$. Feu un dibuix aproximat del recinte.

30. **[2008SetA4]**

    Es considera la corba $y = e^{kx}$, $k > 0$. Escriviu l'equació de la funció $A(k)$ que ens dóna l'àrea de la regió limitada per aquesta corba i les rectes $y = 0$, $x = 0$ i $x = 1$. Calculau $\lim\limits_{k \to 0} A(k)$. Feu un dibuix aclaridor.

31. **[2008SetB4]**

    Dibuixau la regió limitada per les corbes $y = \sin x$, $y = \cos x$ i les rectes $x = 0$ i $x = \pi$. Calculau-ne l'àrea.

32. **[2007JunA4]**

    D'una funció $y = f(x)$, $x > -1$, sabem que té per derivada $f'(x) = \dfrac{a}{1+x}$, on a és una constant. Determinau la funció si, a més, sabem que $f(0) = 1$ i $f(1) = -1$. Feu una gràfica aproximada.

33. **[2007JunB4]**

    Calculau l'àrea del recinte limitat per la corba $y = x - 2\sin x$ i les rectes $y = 0$, $x = -\pi/3$ i $x = \pi/3$. Feu un dibuix aproximat del recinte.

34. **[2006JunB3]**

    Calculau l'àrea de la regió limitada per les corbes $y = x^5 + x^2 + 1$ i $y = x^5 - x + 1$.

35. **[2006SetB4]**

    Calculau l'àrea de la regió limitada per la corba $y = x(x-1)(x-2)$ i la recta $y = 0$. Feu un dibuix d'aquesta regió.

36. **[2005JunB4]**

    Feu un dibuix de la regió limitada per la corba $y = \sin x \cdot \cos x$ i les rectes $x = 0$, $x = 3\pi/2$ i $y = 0$. Calculau-ne l'àrea.

37. **[2005SetB1]**

    Calculau l'àrea del recinte limitat per la corba d'equació $y = x^2 + x + 1$ i la recta d'equació $y = x + 2$.

3.2 Solucions

1. $\int (x^2+1)\ln x\,dx = \left(\dfrac{x^3}{3}+x\right)\ln x - \dfrac{1}{9}x^3 - x + k.$
2. Àrea $= \dfrac{27}{4}$ u^2.
3. $\int \dfrac{2x+5}{(x+3)^3}\,dx = \dfrac{-2}{x+3} + \dfrac{1}{2(x+3)^2} + k.$
4. Àrea $= \dfrac{64}{3}$ u^2.
5. Àrea $= \dfrac{32}{3}$ u^2.
6. $\int \dfrac{x-2}{x^2+x}\,dx = -2\ln|x| + 3\ln|x+1| + K.$
7. $\int \dfrac{x^3}{x^2+1}\,dx = \int \left(x - \dfrac{x}{x^2+1}\right)\,dx = \dfrac{x^2}{2} - \dfrac{1}{2}\ln(x^2+1) + K.$
8. Àrea $= 2\cdot\sin\dfrac{\pi}{2} = 2.$
9. Àrea $= 36\cdot(\ln 12 - \ln 6) = 36\cdot\ln 2.$
10. $\int \dfrac{x}{(x-1)^2}\,dx = \ln|x-1| - \dfrac{1}{x-1} + K.$
11. Àrea $= \ln 2 - \ln\left(\dfrac{1}{2}\right) = 2\ln 2.$
12. $\int \dfrac{x^3}{x^2-5x+6}\,dx = \dfrac{x^2}{2} + 5x - 8\ln|x-2| + 27\ln|x-3| + K.$
13. Àrea $= \dfrac{16\sqrt{2}}{3}.$
14. $\int \dfrac{x-1}{x^3+x^2}\,dx = 2\ln|x| + \dfrac{1}{x} - 2\ln|x+1| + K.$
15. Àrea $= \dfrac{1}{2}(\ln 4 - \ln 3) = \dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{4}{3}\right).$
16. $\int x\cdot\sqrt[3]{4+x^2}\,dx = \dfrac{3}{8}\cdot\sqrt[3]{(4+x^2)^4} + K.$
17. Àrea $= 4(-1+\ln 3).$
18. $\int \dfrac{1}{2x^2+4}\,dx = \dfrac{\sqrt{2}}{4}\cdot\mathrm{arctg}\left(\dfrac{x}{\sqrt{2}}\right) + K.$
19. a) $F(x) = \int \dfrac{x^3}{\sqrt{x^4+1}}\,dx = \dfrac{1}{2}\sqrt{x^4+1} + K.$

    b) $\int_0^1 \dfrac{x^3}{\sqrt{x^4+1}}\,dx = F(1) - F(0) = \dfrac{\sqrt{2}-1}{2}.$
20. a) $I = \int_0^1 \dfrac{2}{3+\sqrt{x}} = 4\int_0^1 \dfrac{t}{t+3}\,dt.$

    b) $I = 4(1 + 3\ln 3 - 3\ln 4).$
21. Àrea $= \dfrac{16}{3}$u^2.
22. $\int \ln(x+1)\,dx = (x+1)\cdot\ln(x+1) - x + K.$
23. Equació de la recta: $y = -x+5$. Àrea $= \dfrac{15}{2} - 4\ln 4$ u^2.
24. $A(t) = \dfrac{3}{5}\sqrt[3]{t^5}.$

    $A(t) = 1 \Rightarrow t = \sqrt[5]{(5/3)^3}.$
25. Àrea $= \dfrac{64}{3}$ u^2.
26. Els punts d'inflexió es troben en $x = \pm\dfrac{\sqrt{3}}{3}$. Àrea $= \dfrac{\pi}{3}$ u^2.
27. a) És contínua en $x \geq 0$.

    b) Àrea $= \left|\dfrac{3-e^2}{4e^2}\right|$ u^2.
28. $A(t) = \ln(1+t)$, $t > 0$.
29. Àrea $= \dfrac{\pi}{2}$ u^2.

30. $A(k) = \int_0^1 e^{kx}\ dx = \dfrac{e^k - 1}{k}$.

    $\lim_{k \to 0} A(k) = \lim_{k \to 0} \dfrac{e^k - 1}{k} = 1$

31. Àrea $= 2\sqrt{2}$ u^2.

32. $y = \dfrac{-2}{\ln 2} \cdot \ln(1 + x) + 1$.

33. Àrea $= 2\left(1 - \dfrac{\pi^2}{18}\right)$ u^2.

34. Àrea $= \dfrac{1}{6}$ u^2.

35. Àrea $= \dfrac{1}{2}$ u^2.

36. Àrea $= \dfrac{4}{3}$ u^2.

37. Àrea $= \dfrac{3}{2}$ u^2.

Capítol 4

Àlgebra lineal

4.1 Enunciats

1) **[2016JunA1]**

   a) Discutiu per a quins valors de m és compatible el següent sistema:

$$\left.\begin{aligned} x+(m-2)y+2mz&=1\\ 3x-y-2z&=2\\ x+z&=3 \end{aligned}\right\}.$$

   b) Resoleu-lo en el cas en què $m=1$.

2) **[2016JunB1]**
   Considerau la matriu segÜent:

$$A=\begin{pmatrix} a & 0 & 0\\ 1 & a & 0\\ 0 & 1 & a \end{pmatrix},$$

   on a és un valor real. Calculau A^2, A^3 i A^4 i donau una fórmula general per a l'expressió de A^n.

3) **[2015JunA1]**

   a) Discutiu per a quins valors de a el sistema següent és compatible:

$$\left.\begin{aligned} ax+y+z&=a^2\\ x-y+z&=1\\ 3x-y-z&=1\\ 6x-y+z&=3a \end{aligned}\right\}.$$

   b) Resoleu-lo en el cas (o els casos) en què sigui compatible.

4) **[2015JunB1]**

   a) Demostrau que l'equació matricial $AB-A=C$ no té solució, on

$$B=\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{3}\\ \frac{1}{2} & \frac{2}{3} \end{pmatrix},\qquad C=\begin{pmatrix} 1 & 2\\ 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

   b) Resoleu l'equació matricial anterior però agafant ara

$$B=\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{3}\\ -\frac{1}{2} & \frac{2}{3} \end{pmatrix},\qquad C=\begin{pmatrix} 1 & 2\\ 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

5) **[2015SetA1]**

a) Discutiu per a quins valors de m el sistema següent té solució distinta de la trivial:

$$\left.\begin{aligned} mx+2y+z&=0\\ 4x+2my+mz&=0\\ 2x+(2m-2)y+z&=0\end{aligned}\right\}.$$

b) Resoleu-lo en el cas (o els casos) en què sigui compatible indeterminat.

6) **[2015SetB1]**
Calculau la matriu X tal que $B\cdot X-B^2=A\cdot B$, on

$$A=\begin{pmatrix}1&0&1\\1&1&0\\0&0&2\end{pmatrix},\qquad B=\begin{pmatrix}1&0&-1\\1&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}.$$

7) **[2014JunA1]**

a) Discutiu per a quins valors de k el sistema següent és compatible:

$$\left.\begin{aligned} x+2y-z&=8\\ 2x-3y+z&=-1\\ 3x-y+kz&=5\end{aligned}\right\}.$$

b) Resoleu-lo en el cas (o els casos) en què sigui compatible.

8) **[2014JunB1]**

a) Discutiu per a quins valors de m el sistema següent és compatible:

$$\left.\begin{aligned} y+z&=1\\ (m-1)x+3y+z&=2\\ x+(m-1)y-z&=0\end{aligned}\right\}.$$

b) Resoleu-lo en el cas (o els casos) en què sigui compatible indeterminat.

9) **[2014SetA1]**

a) Discutiu per a quins valors de b el sistema següent és compatible:

$$\left.\begin{aligned} x+2y-z&=2\\ x+(1+b)y-bz&=2b\\ x+by+(1+b)z&=1\end{aligned}\right\}.$$

b) Resoleu-lo en el cas (o els casos) en què sigui compatible indeterminat.

10) **[2014SetB1]**

a) Discutiu per a quins valors de a el sistema següent és compatible:

$$\left.\begin{aligned} ax+y+2z&=1\\ 2x-2y&=0\\ ax+y-z&=1\end{aligned}\right\}.$$

b) Resoleu-lo en el cas (o els casos) en què sigui compatible.

11) **[2013JunA1]**
Considerau la matriu

$$A=\begin{pmatrix}a+2&a-1\\1&a\end{pmatrix}.$$

a) Calculau els valors de a per als quals la matriu $A^2 - A$ no té inversa.

b) Suposant que $a = 1$, trobau les matrius X que satisfan l'equació $AX + I = A$, on I és la matriu identitat.

12) **[2013JunA2]**

Considerau el sistema d'equacions

$$\left.\begin{aligned} ax + (2a+1)y - az &= 1 \\ ax + y - az &= -2b \\ ay + (1-a)z &= b \end{aligned}\right\}.$$

a) Discutiu per a quins valors de a i b el sistema és compatible.

b) Resoleu-lo en el cas (o els casos) en què sigui compatible indeterminat.

13) **[2013JunB2]**

Considerau el sistema d'equacions

$$\left.\begin{aligned} ax + (2a+1)y + (1-a)z &= 0 \\ 3ax + az &= a \\ ax + ay + (1-a)z &= 0 \end{aligned}\right\}.$$

a) Discutiu per a quins valors de a el sistema és compatible.

b) Resoleu-lo en el cas (o els casos) en què sigui compatible indeterminat.

14) **[2013SetA1]**

Considerau la matriu

$$A = \begin{pmatrix} a & 2+a & 2a \\ 0 & a-1 & 3a \\ 1 & 0 & a \end{pmatrix}.$$

a) Calculau el seu rang segons el valor del paràmetre a.

b) Calculau A^{-1} quan $a = 1$.

15) **[2013SetA2]**

Considerau el sistema d'equacions

$$\left.\begin{aligned} (a+3)x + (2a-1)y &= 0 \\ (a+1)x - az &= a \\ 2x + (a-2)y - az &= a \end{aligned}\right\}.$$

a) Discutiu per a quins valors de a el sistema és compatible.

b) Resoleu-lo en el cas (o els casos) en què sigui compatible indeterminat.

16) **[2013SetB2]**

Considerau el sistema d'equacions

$$\left.\begin{aligned} (a-1)x + 5ay + az &= a - b \\ y - 2az &= a + b \\ 3ay + (2-a)z &= b \end{aligned}\right\}.$$

a) Discutiu per a quins valors de a i b el sistema és compatible.

b) Resoleu-lo en el cas (o els casos) en què sigui compatible indeterminat.

17) **[2012JunA1]**

a) Calculau totes les matrius de la forma $A = \begin{pmatrix} a & b \\ 1 & d \end{pmatrix}$ que satisfan $A^2 = 0$.

b) Demostrau que les matrius de l'apartat anterior no són invertibles.

18) **[2012JunB2]**

a) Discutiu el següent sistema d'equacions lineals segons els valors del paràmetre a:

$$\left.\begin{aligned} x+2y+z&=-1\\ x+ay-az&=0\\ 3ax+6y-3z&=-1\end{aligned}\right\}.$$

b) Resoleu el sistema en el cas en què sigui compatible indeterminat.

19) **[2012SetA1]**

a) Calculau totes les matrius de la forma $A=\begin{pmatrix} a & 1\\ c & -2-a\end{pmatrix}$ que satisfan $A^2+2A+3I=0$, on I és la matriu identitat.

b) Demostrau que les matrius de l'apartat anterior són invertibles i calculau la seva inversa.

20) **[2012SetB2]**

a) Discutiu el següent sistema d'equacions lineals segons els valors del paràmetre b:

$$\left.\begin{aligned} 3x+6y+9z&=1\\ 3x+by+bz&=1\\ bx+y-z&=1\end{aligned}\right\}.$$

b) Resoleu el sistema en el cas en què sigui compatible indeterminat.

21) **[2011JunA1]**

a) Comprovau que si A és una matriu quadrada tal que $A^2=2A-I$, on I és la matriu identitat, aleshores A és invertible. Quina és l'expressió de A^{-1}?

b) Utilitzau l'apartat a) per calcular la inversa de la matriu

$$A=\begin{pmatrix} 5 & -4 & 2\\ 2 & -1 & 1\\ -4 & 4 & -1\end{pmatrix}.$$

22) **[2011JunB1]**

a) Sense desenvolupar el determinant, comprovau que

$$\begin{vmatrix} x & x+1 & x+2\\ x & x+3 & x+4\\ x & x+5 & x+6\end{vmatrix}=0.$$

b) Determinau el rang del conjunt de vectors $\{(1,-2,0,-3),(-1,3,1,4),(2,1,5,-1)\}$.

23) **[2011SetA2]**

Considerau la matriu

$$A=\begin{pmatrix} m & 0 & m\\ 0 & m & 4\\ -1 & 3 & m\end{pmatrix}.$$

a) Determinau per a quins valors del paràmetre m la matriu A no té inversa.

b) Calculau, si és possible, la inversa de A per a $m=1$.

c) Si B és la matriu inversa de A i $\det(A)=5$, quant val $\det(B)$?

24) **[2011SetB1]**

Considerau la matriu

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & x\\ 0 & x & 0 & x\\ 1 & 0 & x & 0\\ 0 & 1 & x & x\end{pmatrix}.$$

a) Resoleu l'equació $\det(A) = 0$.

b) En quins casos la matriu A admet inversa?

25) **[2010JunA1]**

Considerau la matriu
$$A = \begin{pmatrix} m-1 & 1 & -1 \\ 0 & m-2 & 1 \\ m & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

a) Determinau, segons els valors de m, el rang de la matriu A.

b) En el cas $m = 1$, calculau les solucions del sistema homogeni
$$A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

26) **[2010JunB1]**

Considerau les matrius
$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Calculau la matriu X que verifica $XA + I = B$, on I representa la matriu identitat.

27) **[2010SetA2]**

Considerau la matriu
$$A = \begin{pmatrix} m & 1 & 0 \\ 0 & m & 2 \\ 3/2 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

a) Calculau els valors de m per als quals la matriu A no té inversa.

b) Si $m = 2$ calculau, si és possible, la inversa de la matriu A i resoleu el sistema d'equacions
$$A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

28) **[2010SetB2]**

Considerau la matriu
$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 5 & 1 & a \end{pmatrix}.$$

a) Discutiu el rang de la matriu A en funció dels diferents valors de a.

b) Per als valors de a per als quals el rang de la matriu A és 3, resoleu el sistema.
$$A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

29) **[2009JunA1]**

Es consideren les matrius de la forma $A(x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos x & -\sin x \\ 0 & \sin x & \cos x \end{pmatrix}$, on $x \in \mathbb{R}$.

a) Calculau $A(0)$, $A(\frac{\pi}{2})$, $A(-\frac{\pi}{2})$, $A(\pi)$, $A(-\pi)$.

b) Demostrau que $A(x)$ té inversa qualsevol que sigui x. Calculau la inversa.

c) Calculau els valors de x tals que $A(x) = I$, on I és la matriu identitat. És cert que $A(x) \neq A(y)$ sempre que $x \neq y$?

30) **[2009JunB1]**

Considerau el sistema d'equacions

$$\left.\begin{aligned} kx - y + z &= 2x \\ x + 2ky - kz &= y \\ x + ky - z &= 0 \end{aligned}\right\}.$$

a) Per a quins valors de k el sistema té alguna solució distinta de la trivial $(0,0,0)$?

b) Resoleu-lo en el cas $k = 2$.

31) **[2009SetA1]**

Demostrau que les matrius reals X d'ordre 2 tals que $X \cdot X^t = I$ són precisament les que tenen la forma $\begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix}$ o bé $\begin{pmatrix} x & y \\ y & -x \end{pmatrix}$, amb $x^2 + y^2 = 1$.

(X^t indica la matriu transposada de X; I indica la matriu identitat.)

32) **[2009SetB1]**

Considerau la matriu real

$$A = \begin{pmatrix} a+1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & a \\ 1 & a & 2 \end{pmatrix}.$$

a) Determinau el rang de la matriu A segons els valors de a.

b) Fent $a = 0$ resoleu el sistema

$$A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

33) **[2008JunA1]**

Què és la inversa d'una matriu quadrada? Calculau, si escau, la inversa de la matriu

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

34) **[2008JunB1]**

Discutiu el següent sistema i resoleu-lo quan sigui compatible:

$$\left.\begin{aligned} 2x + 2y - 4z &= 1 \\ mx + y + z &= 0 \\ x + y + 3z &= -1 \end{aligned}\right\}.$$

35) **[2008SetA1]**

Determinau totes les matrius de la forma $X = \begin{pmatrix} x & y \\ z & 0 \end{pmatrix}$ que commuten amb la matriu $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.

36) **[2008SetB1]**

Demostrau, per a matrius d'ordre 2, que el determinant d'un producte és el producte dels determinants. És cert que el determinant d'una suma és la suma dels determinants?

37) **[2007JunA1]**

Discutiu el següent sistema segons els valors del paràmetre k i resoleu-lo quan $k = -1$:

$$\left.\begin{aligned} x + y + z &= k \\ (1+k)x + y + z &= 2k \\ x + (1+k)y + z &= 1 \end{aligned}\right\}.$$

38) **[2007JunB1]**

Considerau la matriu

$$A = \begin{pmatrix} 1 & k & k^2 \\ 1 & k & k \\ 1 & k^2 & k^2 \end{pmatrix}.$$

a) Discutiu el rang de la matriu A segons els valors del paràmetre k.

b) Fent $k = -1$, resoleu el sistema

$$A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}.$$

39) **[2007SetA1]**

A cada matriu real $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ li associam el polinomi $p(x) = x^2 - (a+d)x + |A|$, on $|A|$ indica el determinant de A. Diem que $p(x)$ és el polinomi característic de la matriu A. Es demana:

a) Trobar una matriu que tingui com a polinomi característic $p(x) = x^2 + x + 1$. Quantes matrius hi ha amb aquest polinomi característic?

b) Si A té inversa, demostrau que el polinomi característic de A^{-1} és $p(x) = x^2 - \frac{a+d}{|A|}x + \frac{1}{|A|}$.

40) **[2007SetB1]**

Discutiu el sistema següent i resoleu-lo en el cas $k = 1$:

$$\left.\begin{aligned} x + ky + 2z &= 1 \\ x + (2k-1)y + 3z &= 1 \\ x + ky + (k+3)z &= 2k-1 \end{aligned}\right\}.$$

41) **[2006JunA1]**

Digau per a quins valors de k el següent sistema és compatible indeterminat i resoleu-lo en aquest cas:

$$\left.\begin{aligned} kx + (1-k)y + (2-k)z &= 0 \\ x + y + z &= 0 \\ kx + y + kz &= 0 \end{aligned}\right\}.$$

42) **[2006JunB4]**

Considerau la matriu

$$A = \begin{pmatrix} k & 1 & 1 \\ 1 & 2 & k \\ -1 & 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

a) Discutiu el rang de la matriu A segons els valors del paràmetre k.

b) Quan sigui compatible determinat, resoleu el sistema

$$A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

43) **[2006SetA1]**

Es consideren les matrius

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Calculau la matriu X que verifica l'equació $AX + B = I$, on I representa la matriu identitat.

44) **[2006SetB1]**

Calculau m de manera que el sistema homogeni següent tingui solucions diferents de la trivial i resoleu-lo en aquest cas:

$$\left.\begin{aligned} 2x - my + 4z &= 0 \\ x + y + 7z &= 0 \\ mx - y + 13z &= 0 \end{aligned}\right\}.$$

45) **[2005JunA1]**

Estudiau el següent sistema segons els valors de m i resoleu-lo per a $m = 1$

$$\left.\begin{aligned} x + y &= 1 \\ my + z &= 0 \\ x + (m+1)y + mz &= m+1 \end{aligned}\right\}.$$

46) **[2005JunB1]**

Una matriu quadrada es diu ortogonal si la seva inversa coincideix amb la transposada. Es demana:

a) Demostrar que una matriu de la forma $\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$, on $\alpha \in \mathbb{R}$, és ortogonal.

b) Calcular x i y de manera que la matriu $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & x \\ 0 & 0 & y \end{pmatrix}$ sigui ortogonal.

47) **[2005SepA3]**

Resoleu el següent sistema d'equacions quan sigui compatible determinat

$$\left.\begin{aligned} x + y + z &= 2 \\ 2x + 3y + x &= 3 \\ kx + 10y + 4z &= 11 \end{aligned}\right\}.$$

48) **[2005SepB4]**

Comprovau que la inversa de la matriu $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ és la matriu $A^{-1} = \frac{1}{4} \cdot \begin{pmatrix} -1 & -3 & 5 \\ -1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \end{pmatrix}$.

Utilitzau-la per resoldre el sistema $A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

4.2 Solucions

1) a) $\det[A] = 9 - 3m$. $\quad \det[A] = 0 \Rightarrow m = 3$.
$m \neq 3 \Rightarrow$ Sistema compatible determinat.
$m = 3 \Rightarrow$ Sistema incompatible.

b) $m = 1 \Rightarrow (x, y, z) = \left(\frac{13}{6}, \frac{17}{6}, \frac{5}{6}\right)$.

2) $A^2 = \begin{pmatrix} a^2 & 0 & 0 \\ 2a & a^2 & 0 \\ 1 & 2a & a^2 \end{pmatrix}$, $\quad A^3 = \begin{pmatrix} a^3 & 0 & 0 \\ 3a^2 & a^3 & 0 \\ 3a & 3a^2 & a^3 \end{pmatrix}$, $\quad A^4 = \begin{pmatrix} a^4 & 0 & 0 \\ 4a^3 & a^4 & 0 \\ 6a^2 & 4a^3 & a^4 \end{pmatrix}$, $\quad A^n = \begin{pmatrix} a^n & 0 & 0 \\ na^{n-1} & a^n & 0 \\ \frac{n(n-1)}{2}a^{n-2} & na^{n-1} & a^n \end{pmatrix}$.

3) a) $\det[A'] = -4a^2 + 16a - 16$. $\quad \det[A'] = 0 \Rightarrow a = 2$.
$a \neq 2 \Rightarrow$ Sistema incompatible.
$a = 2 \Rightarrow$ Sistema compatible determinat.

b) $a = 2 \Rightarrow (x, y, z) = (1, 1, 1)$.

4) a) La incògnita és la matriu A. Traient factor comú: $AB - A = C \iff A(B - I) = C \iff A = C(B - I)^{-1}$
L'equació té solució $\iff$ La matriu $B - I$ té inversa $\iff det(B - I) \neq 0$. Però $det(B - I) = 0$ i per tant l'equació no té solució.

b) Ara és $det(B - I) \neq 0$, $(B - I)^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{3}{2} \end{pmatrix}$ i $A = C(B - I)^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 3 & -9 \end{pmatrix}$.

5) Es tracta d'un sistema homogeni $\Rightarrow$ És compatible.
$\det[A] = -2m^3 + 4m^2 + 8m - 16 = -2(m - 2)^2(m + 2)$. $\quad \det[A] = 0 \Rightarrow m = \pm 2$.
$m \neq \pm 2 \Rightarrow$ Sistema compatible determinat $\Rightarrow$ El sistema només té la solució trivial $(0, 0, 0)$.
$m = 2 \Rightarrow$ Sistema compatible indeterminat. Solucions: $(x, y, z) = (\lambda, \mu, -2\lambda - 2\mu)$.
$m = -2 \Rightarrow$ Sistema compatible indeterminat. Solucions: $(x, y, z) = (2\lambda, \lambda, 2\lambda)$.

6) $\det[B] = 1 \neq 0 \Rightarrow B^{-1}$ existeix. $\quad B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Aïllant X i calculant: $X = (B^{-1} \cdot A + I) \cdot B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

7) a) $\det[A] = -7k$. $\quad \det[A] = 0 \Rightarrow k = 0$.
$k \neq 0 \Rightarrow$ Sistema compatible determinat.
$k = 0 \Rightarrow$ Sistema incompatible.

b) $k \neq 0 \Rightarrow (x, y, z) = \left(\frac{22k-2}{7k}, \frac{17k-6}{7k}, \frac{-2}{k}\right)$.

8) a) $\det[A] = m^2 - m - 2$. $\quad \det[A] = 0 \Rightarrow m = -1, m = 2$.
$m \neq -1$ i $m \neq 2 \Rightarrow$ Sistema compatible determinat.
$m = -1 \Rightarrow$ Sistema incompatible.
$m = 2 \Rightarrow$ Sistema compatible indeterminat.

b) $m = 2 \Rightarrow (x, y, z) = (1 - 2\lambda, \lambda, 1 - \lambda)$.

9) a) $\det[A] = 2b(b - 1)$. $\quad \det[A] = 0 \Rightarrow b = 0, b = 1$.
$b \neq 0$ i $b \neq 1 \Rightarrow$ Sistema compatible determinat.
$b = 0 \Rightarrow$ Sistema incompatible.
$b = 1 \Rightarrow$ Sistema compatible indeterminat.

b) $b = 1 \Rightarrow (x, y, z) = (-5\lambda, 1 + 3\lambda, \lambda)$.

10) a) $\det[A] = 6(a + 1)$. $\quad \det[A] = 0 \Rightarrow a = -1$.
$a \neq -1 \Rightarrow$ Sistema compatible determinat.
$a = -1 \Rightarrow$ Sistema incompatible.

b) $a \neq -1 \Rightarrow (x, y, z) = \left(\frac{1}{a+1}, \frac{1}{a+1}, 0\right)$.

11) a) $\det[A^2 - A] = \det[A \cdot (A - I)] = \det[A] \cdot \det[A - I] = a^4 - a = a(a - 1)(a^2 + a + 1)$.
$A^2 - A$ no té inversa si i només sí $a = 0$ o $a = 1$.

b) $X = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix}$.

12) a) $\det[A] = 2a^2(a - 1)$. $\quad \det[A] = 0 \Rightarrow a = 0, a = 1$.
$a \neq 0$ i $a \neq 1 \Rightarrow$ Sistema compatible determinat.
$a = 0$ i $b = -\frac{1}{2} \Rightarrow$ Sistema compatible indeterminat.
$a = 0$ i $b \neq -\frac{1}{2} \Rightarrow$ Sistema incompatible.
$a = 1 \Rightarrow$ Sistema incompatible.

b) $a = 0$ i $b = -\frac{1}{2} \Rightarrow (x, y, z) = (\lambda, 1, -\frac{1}{2})$.

13) a) $\det[A] = a(4a^2 + a - 3)$. $\det[A] = 0 \Rightarrow a = 0, a = -1, a = \frac{3}{4}$.
$a \neq 0$, $a \neq -1$ i $a \neq \frac{3}{4} \Rightarrow$ Sistema compatible determinat.
$a = 0 \Rightarrow$ Sistema compatible indeterminat.
$a = -1 \Rightarrow$ Sistema compatible indeterminat.
$a = \frac{3}{4} \Rightarrow$ Sistema incompatible.

b) $a = 0 \Rightarrow (x, y, z) = (\lambda, 0, 0)$.
$a = -1 \Rightarrow (x, y, z) = (\lambda, 2 - 7\lambda, 1 - 3\lambda)$.

14) a) $\det[A] = a(a^2 + 8)$. $\det[A] = 0 \Rightarrow a = 0$.
$a \neq 0 \Rightarrow Rang[A] = 3$.
$a = 0 \Rightarrow Rang[A] = 2$.

b) $X = \dfrac{1}{9} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -3 & 9 \\ 3 & -1 & -3 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}$.

15) a) $\det[A] = a(a^2 - 2a - 5)$. $\det[A] = 0 \Rightarrow a = 0, a = -1, a = \frac{5}{3}$.
$a \neq 0$, $a \neq -1$ i $a \neq \frac{5}{3} \Rightarrow$ Sistema compatible determinat.
$a = 0$ o $a = -1$ o $a = \frac{5}{3} \Rightarrow$ Sistema compatible indeterminat.

b) $a = 0 \Rightarrow (x, y, z) = (0, 0, \lambda)$.
$a = -1 \Rightarrow (x, y, z) = (\lambda, \frac{2}{3}\lambda, -1)$.
$a = \frac{5}{3} \Rightarrow (x, y, z) = (\lambda, -2\lambda, -1 + \frac{8}{5}\lambda)$.

16) a) $\det[A] = 6a^3 - 7a^2 + 3a - 2$. $\det[A] = 0 \Rightarrow a = 1$.
$a \neq 1 \Rightarrow$ Sistema compatible determinat.
$a = 1$ i $b = \frac{1}{4} \Rightarrow$ Sistema compatible indeterminat.
$a = 1$ i $b \neq \frac{1}{4} \Rightarrow$ Sistema incompatible.

b) $a = 0$ i $b = \frac{1}{4} \Rightarrow (x, y, z) = (\lambda, \frac{1}{4}, -\frac{1}{2})$.

17) a) $A^2 = \begin{pmatrix} a^2 + b & ab + bd \\ a + d & b + d^2 \end{pmatrix}$ $A = \begin{pmatrix} a & -a^2 \\ 1 & -a \end{pmatrix}$.

b) Si existís A^{-1} seria $A^{-1} \cdot A^2 = A^{-1} \cdot 0$ i per tant $A = 0$ que no és inversible. Absurd.

18) a) $\det[A] = -9a^2 + 3a + 12$. $\det[A] = 0 \Rightarrow a = -1, a = \frac{4}{3}$.
$a \neq -1$ i $a \neq \frac{4}{3} \Rightarrow$ Sistema compatible determinat.
$a = -1$ o $a = \frac{4}{3} \Rightarrow$ Sistema compatible indeterminat.

b) $a = -1 \Rightarrow (x, y, z) = (-\frac{1}{3} - \lambda, -\frac{1}{3}, \lambda)$.
$a = \frac{4}{3} \Rightarrow (x, y, z) = (2 + 6\lambda, -\frac{3}{2} - \frac{7}{2}\lambda, \lambda)$.

19) a) $A^2 + 2A + 3I = \begin{pmatrix} a^2 + 2a + c + 3 & 0 \\ 0 & a^2 + 2a + c + 3 \end{pmatrix}$ $A = \begin{pmatrix} a & 1 \\ -a^2 - 2a - 3 & -2 - a \end{pmatrix}$.

b) $A^{-1} = -\dfrac{1}{3}(A + 2I) = -\dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} a + 2 & 1 \\ -a^2 - 2a - 3 & -a \end{pmatrix}$.

20) a) $\det[A] = -3b^2 - 6b + 45$. $\det[A] = 0 \Rightarrow b = -5, b = 3$.
$b \neq -5$ i $b \neq 3 \Rightarrow$ Sistema compatible determinat.
$b = -5 \Rightarrow$ Sistema incompatible.
$b = 3 \Rightarrow$ Sistema compatible indeterminat.

b) $b = 3 \Rightarrow (x, y, z) = (\frac{1}{3} + \lambda, -2\lambda, \lambda)$.

21) a) $A^2 = 2A - I \Rightarrow 2A - A^2 = I \Rightarrow A(2I - A) = I$.
Per la definició de matriu inversa i de la unicitat d'aquesta es desprén que $A^{-1} = 2I - A$,

b) $A^{-1} = 2I - A = \begin{pmatrix} -3 & 4 & -2 \\ -2 & 3 & -1 \\ 4 & -4 & 3 \end{pmatrix}$.

22) a)

$$\begin{vmatrix} x & x+1 & x+2 \\ x & x+3 & x+4 \\ x & x+5 & x+6 \end{vmatrix} \overset{\boxed{\substack{C_2 - C_1 \\ C_3 - C_2}}}{=} \begin{vmatrix} x & 1 & 1 \\ x & 3 & 1 \\ x & 5 & 1 \end{vmatrix} = x \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 5 & 1 \end{vmatrix} \overset{\boxed{F_1 = F_3}}{=} = 0.$$

b) El rang dels quatre vectors és 2.

23) a) $\det[A] = m^3 + m^2 - 12m = m(m + 4)(m - 3)$.
A no té inversa $\Leftrightarrow \det[A] = 0 \Leftrightarrow m = 0,\ m = -4,\ m = 3$.

b) Si $m = -1$:

$A^{-1} = \dfrac{1}{10} \cdot \begin{pmatrix} 11 & -3 & 1 \\ 4 & -2 & 4 \\ -1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$.

c) $\det[A]\cdot\det[A^{-1}] = 1 \Rightarrow \det[B] = \det[A^{-1}] = \dfrac{1}{5}$

24) a)

$$\det[A] = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & x \\ 0 & x & 0 & x \\ 1 & 0 & x & 0 \\ 0 & 1 & x & x \end{vmatrix} \overset{\boxed{F_3 - F_1}}{=} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & x \\ 0 & x & 0 & x \\ 0 & 0 & x & -x \\ 0 & 1 & x & x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & 0 & x \\ 0 & x & -x \\ 1 & x & x \end{vmatrix} = x^2 \cdot \begin{vmatrix} x & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = x^2(2x-1)).$$

Per tant, $\det[A] = 0 \Leftrightarrow x = 0,\ x = \dfrac{1}{2}$

b) A té inversa $\Leftrightarrow \det[A] \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 0,\ x \neq \dfrac{1}{2}.$

25) a) $\det[A] = 3m^2 - 7m + 4.$ $\quad \det[A] = 0 \Rightarrow m = 1,\ m = \dfrac{4}{3}.$

$m \neq 1$ i $m \neq \dfrac{4}{3} \Rightarrow Rang[A] = 3$.

$m = 1$ o $m = \dfrac{4}{3} \Rightarrow Rang[A] = 2.$

b) Si $m = 1$ el sistema és compatible indeterminat. Solució: $(-2\lambda, \lambda, \lambda)$.

26) $\det[A] = 3 \neq 0 \Rightarrow A^{-1}$ existeix. $\quad A^{-1} = \dfrac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$

Aïllant X i calculant: $X = (B - I)\cdot A^{-1} = \dfrac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} -1 & -1 & 6 \\ 0 & 0 & 3 \\ -1 & 2 & -3 \end{pmatrix}.$

27) a) $\det[A] = m^2 - 4m + 3.$
A no té inversa $\Leftrightarrow \det[A] = 0 \Leftrightarrow m = 1,\ m = 3.$

b) Si $m = 2$:

$A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ -3 & -2 & 4 \\ 3 & 5/2 & -4 \end{pmatrix}. \qquad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = A^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ -4 \end{pmatrix}.$

28) a) $\det[A] = 3a - 24.$ $\quad \det[A] = 0 \Rightarrow m = 8.$
$a \neq 8 \Rightarrow Rang[A] = 3$.
$a = 8 \Rightarrow Rang[A] = 2.$

b) Si $a \neq 8$, el sistema és compatible determinat(per a cada valor de a el sistema té una única solució).

Solució: $\left(\dfrac{3a-14}{3a-24}, \dfrac{-2}{3a-24}, \dfrac{-6}{3a-24}\right).$

29) a)

b) $\det[A(x)] = \sin^2 x + \cos^2 x = 1 \neq 0 \Rightarrow A^{-1}$ existeix per a qualsevol valor de x.

$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos x & \sin x \\ 0 & -\sin x & \cos x \end{pmatrix}.$

c) $A(x) = I \Leftrightarrow x = 2\pi k,$ amb $k \in \mathbb{Z}$.
$A(x) = A(y) \Leftrightarrow x - y = 2\pi k,$ amb $k \in \mathbb{Z}$.

30) a) Es tracta d'un sistema homogeni $\Rightarrow$ És compatible.
$\det[A] = k^3 - 4k^2 + 5k - 2 = (k-1)^2(k-2).$ $\quad \det[A] = 0 \Rightarrow k = 1, k = 2.$
$k \neq 1$ i $k \neq 2 \Rightarrow$ Sistema compatible determinat $\Rightarrow$ El sistema només té la solució trivial $(0, 0, 0)$.
$k = 1$ o $k = 2 \Rightarrow$ Sistema compatible indeterminat.

b) Si $k = 1 \Rightarrow (x, y, z) = (\lambda, \mu, \lambda + \mu)$.
Si $k = 2 \Rightarrow (x, y, z) = (-\lambda, \lambda, \lambda)$.

31)

32) a) $\det[A] = -a(a^2 + a - 4).$ $\quad \det[A] = 0 \Rightarrow a = 0,\ a = 1,\ a = -2.$
$a \neq 0$ i $a \neq 1$ i $a \neq -2 \Rightarrow Rang[A] = 3$.
$a = 0,\ a = 1,\ a = -2 \Rightarrow Rang[A] = 2$.

b) Es tracta d'un sistema homogeni $\Rightarrow$ És compatible.
Per l' apartat a) sabem que $Rang[A] = 2 < 3 =$ n. d'incògnites $\Rightarrow$ Sistema compatible indeterminat.
Solució: $(x, y, z) = (-2\lambda, \lambda, \lambda)$

33) $\det[A] = 6 \neq 0 \Rightarrow A^{-1}$ existeix. $\quad A^{-1} = \dfrac{1}{6} \begin{pmatrix} -2 & 0 & 4 \\ 2 & 3 & -1 \\ -2 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$

34) $\det[A] = 10 - 10m.$ $\quad \det[A] = 0 \Rightarrow m = 1.$
$m \neq 1 \Rightarrow$ Sistema compatible determinat. Solució: $(x, y, z) = (\frac{-4}{10-10m}, \frac{m+3}{10-10m}, \frac{3m-3}{10-10m}).$
$m = 1 \Rightarrow$ Sistema incompatible .

35) $X = \begin{pmatrix} -\lambda & \frac{2}{3}\lambda \\ \lambda & 0 \end{pmatrix}$, amb $\lambda \in \mathbb{R}$.

36)

37) a) $\det[A] = k^2$. $\det[A] = 0 \Rightarrow k = 0$.
$k \neq 0 \Rightarrow$ Sistema compatible determinat.
$k = 0 \Rightarrow$ Sistema incompatible.

b) Si $k = -1 \Rightarrow$ Sistema compatible determinat amb solució $(x, y, z) = (1, -2, 0)$.

38) a) $\det[A] = k^4 - 2k^3 + k^2 = k^2(k-1)^2$. $\det[A] = 0 \Rightarrow k = 0,\ k = 1$.
$k \neq 0$ i $k \neq 1 \Rightarrow Rang[A] = 3$.
$k = 0,\ k = 1 \Rightarrow Rang[A] = 1$.

b) Per l' apartat a) sabem que $Rang[A] = 3 =$ n. d'incògnites $\Rightarrow$ Sistema compatible determinat.
Solució: $(x, y, z) = (\frac{b+c}{2}, \frac{c-a}{2}, \frac{a-b}{2})$.

39)

40) $\det[A] = k^2 - 1$. $\det[A] = 0 \Rightarrow k = \pm 1$.
$k \neq \pm 1 \Rightarrow$ Sistema compatible determinat.
$k = -1 \Rightarrow$ Sistema incompatible.
$k = 1 \Rightarrow$ Sistema compatible indeterminat amb solució $(x, y, z) = (\lambda, 1 - \lambda, 0)$.

41) a) Es tracta d'un sistema homogeni $\Rightarrow$ És compatible.
$\det[A] = 2k^2 - 4k + 2 = 2(k-1)^2$. $\det[A] = 0 \Rightarrow k = 1$.
$k \neq 1 \Rightarrow$ Sistema compatible determinat $\Rightarrow$ El sistema només té la solució trivial $(0, 0, 0)$.
$k = 1 \Rightarrow$ Sistema compatible indeterminat. Solució: $(x, y, z) = (-\lambda, 0, \lambda)$

42) a) $\det[A] = -3k^2 - k + 5$. $\det[A] = 0 \Rightarrow k = \frac{-1 \pm \sqrt{61}}{6},\ k = 1$.
$k \neq \frac{-1 \pm \sqrt{61}}{6} \Rightarrow Rang[A] = 3$.
$k = \frac{-1 \pm \sqrt{61}}{6} \Rightarrow Rang[A] = 2$.

b) $(x, y, z) = (0, 1, 0)$. Observau que la solució és independent del valor de k ($k \neq \frac{-1 \pm \sqrt{61}}{6}$).

43) $\det[A] = 3 \neq 0 \Rightarrow A^{-1}$ existeix. $A^{-1} = \dfrac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

Aïllant X i calculant: $X = A^{-1} \cdot (I - B) = \dfrac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 3 & -2 \\ -2 & 0 & 1 \\ -3 & -3 & 0 \end{pmatrix}$.

44) a) Es tracta d'un sistema homogeni $\Rightarrow$ És compatible.
$\det[A] = -7m^2 + 9m + 36$. $\det[A] = 0 \Rightarrow m = 3,\ m = -\frac{12}{7}$.
$m \neq 3$ i $m \neq -\frac{12}{7} \Rightarrow$ Sistema compatible determinat $\Rightarrow$ El sistema només té la solució trivial $(0, 0, 0)$.
$m = 3$ o $m = -\frac{12}{7} \Rightarrow$ Sistema compatible indeterminat.
Si $m = 3$: $(x, y, z) = (-5\lambda, -2\lambda, \lambda)$.
Si $m = -\frac{12}{7}$: $(x, y, z) = (28\lambda, -35\lambda, \lambda)$.

Capítol 5

Geometria

5.1 Enunciats

1) **[2016JunA2]**

   Determinau m perquè la recta $r: \dfrac{x-1}{0} = \dfrac{y+1}{1} = \dfrac{z-3}{1}$ i el pla $\pi: x+2y+mz=6$ formin un angle de 45 graus i calculau el punt d'intersecció entre la recta i el pla.

2) **[2016JunB2]**

   Determinau m perquè la recta $r: \dfrac{x}{-1} = \dfrac{y+1}{m} = \dfrac{z+3}{3}$ sigui paral·lela al pla $\pi: x+y-z=5$ i calculau la distància entre ells.

3) **[2015JunA2]**

   Estudiau la posició relativa de les següents rectes i, en cas que es tallin, trobau el punt d'intersecció:

$$r: \frac{x-2}{-3} = \frac{y-3}{5} = z; \qquad s: \begin{cases} x = 1-t, \\ y = 2t, \\ z = 5. \end{cases}$$

4) **[2015JunB2]**

   Trobau l'equació de la recta que passa pel punt $A(1,0,2)$ i és paral·lela als plans $\pi_1: x-2y+3z+1=0$ i $\pi_2: 2x-3y+z+6=0$.

5) **[2015SetA2]**

   Determinau el valor de m perquè els punts $A(1,2,0)$, $B(0,3,-1)$, $C(1,0,1)$ i $D(-1,2,m)$ siguin coplanaris i calculau l'equació general del pla que els conté.

6) **[2015SetB2]**

   Calculau el punt simètric del punt $A(-3,1,-7)$ respecte de la recta $x+1 = \dfrac{y-3}{2} = \dfrac{z+1}{2}$.

7) **[2014JunA2]**

   Determina el punt (o els punts) de la recta r que equidista dels plans π_1 i π_2, on

$$r: \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z}{2}; \qquad \pi_1: x+y+z+3=0; \qquad \pi_2: \begin{cases} x = -3+\lambda, \\ y = -\lambda+\mu, \\ z = -6+\mu. \end{cases}$$

8) **[2014JunB2]**

   Trobau l'equació contínua de la recta r paral·lela al pla $\pi: 2x-2y+5z=3$ i perpendicular a la recta $s: \dfrac{x+1}{2} = \dfrac{y-2}{-1} = \dfrac{z}{3}$ al punt $P(-1,2,0)$.

9) **[2014SetA2]**

   Calculau l'equació general del pla que passa pels punts A, B i C, on:

- A és el simètric del punt $P(1,2,3)$ respecte del pla $x = z$.
- B és la projecció ortogonal del punt $Q(2,1,3)$ sobre el pla $z = 0$.
- C és l'origen de coordenades.

10) **[2014SetB2]**

Trobau els punts P situats a distància 5 de l'origen de coordenades i que pertanyen a la recta r que passa pels punts $A(1,2,5)$ i $B(6,5,6)$.

11) **[2013JunB1]**

Donat el punt $P(1,1,1)$ i el pla $\pi : x - y + z = 5$.

a) Calculau les equacions contínues de la recta perpendicular al pla π que passa pel punt P.

b) Calculau el simètric del punt P respecte del pla π.

12) **[2013SetB1]**

Considerem el punt $P(1,2,3)$ i la recta $r : \dfrac{x-2}{3} = \dfrac{y+1}{2} = \dfrac{z-1}{1}$.

a) Calculau l'equació general del pla π que conté el punt P i la recta r.

b) Calculau el punt simètric de P respecte de la recta r.

13) **[2012JunA2]**

Calculau la recta perpendicular al pla que passa pels punts $P_1(1,1,1)$, $P_2(0,2,1)$, $P_3(0,0,-1)$ i que passa pel punt $O(0,0,0)$.

14) **[2012JunB1]**

Donades les rectes

$$r_1 : \begin{cases} x + 2y + 3z = -1 \\ x + y - z = 0 \end{cases}, \qquad r_2 : \begin{cases} x + y = 0 \\ 2x + y = 1 \end{cases}.$$

a) Calculau la posició relativa de les dues rectes.

b) Calculau, si escau, o bé el punt d'intersecció de les dues rectes o bé la recta perpendicular a les dues rectes i que les talli.

15) **[2012SetA2]**

Donades les rectes

$$r_1 : \begin{cases} x + 2y + 3z = -1 \\ y - z = 2 \end{cases}, \qquad r_2 : \begin{cases} x + y + z = -1 \\ 2x + z = -4 \end{cases}.$$

Demostrau que es tallen i calculau el punt de tall.

16) **[2012SetB1]**

Demostrau que els punts $P_1(2,1,1)$, $P_2(5,2,1)$, $P_3(9,1,0)$, $P_4(11,4,1)$ són coplanaris i calculau l'equació del pla que els conté.

17) **[2011JunA2]**

Donats el punt $A(1,3,0)$ i el pla $\pi : x + 2y + z - 1 = 0$, determinau les coordenades del punt A' simètric del punt A respecte del pla π. Calculau la distància de A' al pla π.

18) **[2011JunB2]**

Determinau l'equació del pla π que, passant pels punts $A(1,0,0)$ i $B(0,2,0)$, talla l'eix OZ en el punt $C(0,0,c)$, amb $c > 0$, tal que l'àrea del triangle ABC val $\sqrt{6}$.

19) **[2011SetA1]**

Determinau l'equació del pla π que passa pel punt $A(1,2,1)$ i és paral·lel a les rectes

$$r_1 : \begin{cases} x + y - 2z = 0 \\ 2x - y - z = 0 \end{cases}, \qquad r_2 : \begin{cases} -x - y + z + 1 = 0 \\ y + z - 2 = 0 \end{cases}.$$

20) **[2011SetA1]**

Obteniu el pla π que passa pel punt $A(3,2,7)$ i per la intersecció dels plans

$$\pi_1 : x - y + z - 4 = 0, \qquad \pi_2 : x + y - z + 7 = 0.$$

21) **[2010JunA2]**

Considerau les següents rectes:

$$\frac{x-1}{k} = \frac{y}{2} = \frac{z+3}{k}, \qquad \frac{x+1}{2k} = \frac{y}{k+3} = \frac{z-2}{2}.$$

a) Calculau el valor de k per al qual les rectes són paral·leles.

b) Calculau, en aquest cas, la distància entre les rectes.

22) **[2010JunB2]**

Siguin $P = (a_1, b_1, c_1)$ i $Q = (a_2, b_2, c_2)$ dos punts del pla $Ax + By + Cz + D = 0$. Demostrau que el vector $\overrightarrow{PQ}$ és perpendicular al vector $\vec{n} = (A, B, C)$. Aplicau-ho per calcular l'equació general del pla que conté els punts $P(1,2,3)$, $Q(-1,0,2)$ i $R(1,1,1)$.

23) **[2010SetA1]**

Determinau l'equació de la recta r que passa pel punt $(1,1,1)$ i és paral·lela a la recta r_1 d'equacions implícites:

$$r_1 : \begin{cases} -3x + y - z + 12 = 0 \\ x - 2y - 3z = 0 \end{cases}.$$

Donau l'equació de r en forma vectorial, paramètrica, contínua i implícita.

24) **[2010SetB1]**

Determinau l'equació de la recta r que passa pel punt $(3,4,7)$ i és perpendicular a les rectes:

$$r_1 : \frac{x-1}{2} = \frac{y-3}{3} = \frac{z-4}{2}, \qquad r_2 : x - 1 = y - 2 = \frac{z-3}{4}.$$

Donau l'equació de r en forma vectorial, paramètrica, contínua i implícita.

25) **[2009JunA2]**

Demostrau que el punt $A(-1,1,0)$ no és coplanari amb els punts $B(0,0,0)$, $C(0,1,0)$ i $D(1,2,1)$. Calculau la distància de A al pla determinat per B, C i D.

26) **[2009JunB2]**

Calculau l'equació contínua de la recta que passa pel punt $(2,1,5)$ i és perpendicular a les rectes

$$\frac{x}{-1} = \frac{y+2}{0} = \frac{z-3}{4}, \qquad \frac{x-1}{-5} = \frac{y-2}{3} = \frac{z-3}{-1}.$$

27) **[2009SetA2]**

Estudiau la posició relativa dels plans següents segons els valors de m:

$$\pi_1 : x + y = 1, \qquad \pi_2 : my + z = 0, \qquad \pi_3 : x + (1+m)y + mz = m + 1.$$

28) **[2009SetB2]**

Sigui r la recta intersecció dels dos plans $\pi_1 : ax + by + cz + d = 0$ i $\pi_2 : a'x + b'y + c'z + d' = 0$. Es considera la família de plans de la forma $ax + by + cz + d + k(a'x + b'y + c'z + d') = 0$, on k és un paràmetre real. Es demana:

a) Demostrau que la recta r està continguda en tots els plans de la família.

b) Calculau els plans de la família $2x - y + z + 1 + k(x + y + z - 2) = 0$ que es troben a distància 1 de l'origen de coordenades.

29) **[2008JunA2]**
Es consideren les rectes
$$\frac{x-1}{3}=\frac{y+2}{3}=z-2, \qquad \frac{x+1}{3}=\frac{y}{4}=\frac{z-1}{-3}.$$

a) Demostrau que es creuen.
b) Determinau un vector director de la recta perpendicular comuna a les dues rectes.

30) **[2008JunB2]**
Es consideren els punts $A(1,-1,1)$, $B(2,3,1)$ i $C(1,2,0)$. Es demana:

a) Demostrar que determinen un triangle.
b) Determinar els punts d'intersecció amb els eixos de coordenades del pla determinat per aquest triangle.

31) **[2008SetA2]**
Determinau el punt del pla més pròxim al punt $(1,1,1)$.

32) **[2008SetB2]**
Determinau el punt de la recta $(x,y,z)=(0,1,-1)+t(1,2,3)$ més pròxim al punt $(1,1,1)$.

33) **[2007JunA2]**
Es considera el triangle de vèrtexs $A(0,0,1)$, $B(2,0,0)$ i $C(1,1,1)$. Quina és la intersecció dels tres plans que passant per cada vèrtex són perpendiculars a la recta determinada pels altres dos vèrtexs?

34) **[2007JunB2]**
Siguin les rectes $\frac{x-1}{2}=\frac{y}{1}=\frac{z+1}{3}$ i la determinada per la intersecció dels plans $x+y-z=1$ i $2x-y+z=2$.

a) Calculau l'equació del pla que passa per l'origen i és paral·lel a les dues rectes.
b) Calculau l'equació de la recta que passa per $(1,1,1)$ i és perpendicular al pla trobat.

35) **[2007SetA2]**
Calculau l'equació de la recta que passa pel punt $P(2,-1,1)$ i talla perpendicularment la recta
$$\frac{x-3}{3}=\frac{y+1}{1}=\frac{z}{2}.$$

36) **[2007SetB2]**
Calculau els punts de la recta $\frac{x+2}{3}=\frac{y}{-1}=\frac{z}{2}$ que estan a dístància 1 del pla $x+y+z=0$.

37) **[2006JunA2]**
Donat un cub (hexàedre regular) de costat 1 dm, es considera una de les seves diagonals i la diagonal d'una de les seves cares de manera que no tinguin (les diagonals) cap punt en comú. Calculau la distància entre les diagonals. *Indicació: Dibuixau un cub amb un vèrtex en l'origen de coordenades i els vèrtexs contigus sobre els eixos de coordenades.*

38) **[2006JunB2]**
De totes les rectes que passen pel punt $P(0,2,-1)$, cercau la que talla les rectes d'equacions
$$(x,y,z)=(1,1,2)+t(2,-1,0), \qquad (x,y,z)=(0,1,1)+s(-3,1,2).$$

39) **[2006SetA2]**
Estudiau, segons els valors del paràmetre k, la posició relativa de les rectes
$$x-k=\frac{y+1}{2k-1}=\frac{z}{2}, \qquad \frac{x}{k+1}=\frac{y-2}{-1}=z+2.$$

40) **[2006SetB2]**
Cercau l'equació implícita (o general) del pla que conté la recta $(x,y,z)=(1,2,-1)+k(-1,1,2)$ i és paral·lela la recta que passa pels punts $A(0,1,2)$ i $B(1,-1,1)$. Calculau la distància de l'origen de coordenades a aquest pla.

41) **[2005JunA2]**

Trobau l'equació de la recta que talla perpendicularment les rectes $x = y = z$ i $x = y + 1 = 2z - 2$.

42) **[2005JunB2]**

Donats els plans

$$(k-2)x + y + (2k+1)z = 1, \qquad 2x + (k-1)y - z = 0.$$

a) Estudiau la posició relativa dels plans segons els valors de k.

b) Trobau l'equació contínua de la recta d'intersecció dels plans en el cas $k = -1$.

43) **[2005SetA2]**

Es consideren els punts $A(3,0,0)$, $B(0,2,0)$ i $C(0,0,1)$. Es demana:

a) Trobar l'equació general del pla π que els conté.

b) Trobar l'equació de la recta perpendicular a π i que passa per l'origen de coordenades.

c) Trobar el punt d'intersecció de la recta amb el pla.

44) **[2005SetB2]**

Calculau la distància del punt $P(-1,4,1)$ a la recta d'intersecció dels plans

$$x - 2y + z - 1 = 0, \qquad 2x + y - 3z - 2 = 0.$$

5.2 Solucions

1) $m = \frac{1}{4}$. Punt d'intersecció $= \left(1, \frac{16}{9}, \frac{52}{9}\right)$.

2) $m = 4$. Distància del punt al pla $= \sqrt{3}$ unitats de longitud.

3) Les dues rectes es tallen en el punt $(-13, 28, 5)$.

4) $r : \frac{x-1}{7} = \frac{y}{5} = z - 2$.

5) A, B, C, D coplanaris $\Leftrightarrow \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}$ linealment dependents $\Leftrightarrow \det[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}] = 0 \Leftrightarrow m = -1$.
Equació del pla que conté els quatre punts : $\pi : -x + y + 2z - 1 = 0$.

6) Pla perpendicular a r que conté el punt A: $\pi : x + 2y + 2z + 15 = 0$.
Punt de tall de r i π: $M = (-3, -1, -5)$.
Punt simètric de A respecte de r: $A' = (-3, -3, -3)$.

7) $P_1\left(-2, -\frac{5}{2}, -3\right)$ i $P_2(1, -1, 0)$.

8) $r : \frac{x+1}{-1} = \frac{y-2}{4} = \frac{z}{2}$.

9) $A(3, 2, 1)$, $B(2, 1, 0)$ i $\pi : x - 2y + z = 0$.

10) $P_1\left(-\frac{18}{7}, -\frac{1}{7}, \frac{30}{7}\right)$ i $P_2\left(0, \frac{7}{5}, \frac{24}{5}\right)$

11) a) $\frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-1}{1}$.
b) $P'\left(\frac{11}{3}, -\frac{5}{3}, \frac{11}{3}\right)$.

12) a) $\pi : -x + 7y - 11z + 20 = 0$.
b) $P'\left(\frac{36}{7}, -\frac{18}{7}, -\frac{2}{7}\right)$.

13) Pla que conté els tres punts: $\pi : x + y - z - 1 = 0$.
La recta és: $\frac{x}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z}{-1}$.

14) Les dues rectes es tallen en el punt $(1, -1, 0)$.

15) Les dues rectes es tallen en el punt $\left(-\frac{5}{3}, \frac{4}{3}, -\frac{2}{3}\right)$.

16) L'equació del pla que conté els quatre punts és $x - 3y + 7z - 6 = 0$.

17) El punt simètric del punt A respecte del pla π és $A'(-1, -1, -2)$.
$d(A', \pi) = \sqrt{6}$.

18) $c = 2$.
$\pi : 2x + y + z - 2 = 0$.

19) $\pi : 2x + y - 3z - 1 = 0$.

20) $\pi : -x + 9y - 9z + 48 = 0$.

21) a) $k = 1$.
b) $d(r, s) = \frac{\sqrt{110}}{2}$.

22) $\pi : 3x - 4y + 2z - 1 = 0$.

23) Equació vectorial: $(x, y, z) = (1, 1, 1) + \lambda(1, 2, -1)$.
Equació paramètrica: $\begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 1 + 2\lambda \\ z = 1 - \lambda \end{cases}$.
Equació contínua: $\frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-1}{-1}$.
Equació implícita (qualsevol de les següents):

$$\begin{cases} 2x - y - 1 = 0 \\ x + z - 2 = 0 \end{cases}, \quad \begin{cases} 2x - y - 1 = 0 \\ y + 2z - 3 = 0 \end{cases}, \quad \begin{cases} x + z - 2 = 0 \\ y + 2z - 3 = 0 \end{cases}.$$

24) Equació vectorial: $(x, y, z) = (3, 4, 7) + \lambda(-10, 6, 1)$.
Equació paramètrica: $\begin{cases} x = 3 - 10\lambda \\ y = 4 + 6\lambda \\ z = 7 + \lambda \end{cases}$.
Equació contínua: $\frac{x-3}{-10} = \frac{y-4}{6} = \frac{z-7}{1}$.
Equació implícita: $\begin{cases} 6x + 10y - 58 = 0 \\ y - 6z + 38 = 0 \end{cases}$.

25) A, B, C, D coplanaris $\Leftrightarrow \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}$ linealment independents $\Leftrightarrow \det[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}] = 0$.
Equació del pla determinat per B, C i D: $\pi : x - z = 0$.
$d(A, \pi) = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

26) $\frac{x-2}{4} = \frac{y-1}{7} = \frac{z-5}{1}$.

27) Si $m \neq 0$ i $m \neq 1$, els tres plans es tallen en un punt.
Si $m = 0$, els plans es tallen en un recta (els plans 1 i 3 coincideixen).
Si $m = 1$, el tres plans no tenen cap punt en comú (es tallen dos a dos).

28) $k = 4 \pm \sqrt{21}$.

29) a) r, s es creuen $\Leftrightarrow \overrightarrow{d_r}, \overrightarrow{d_s}, \overrightarrow{RS}$ linealment independents $\Leftrightarrow \det[\overrightarrow{d_r}, \overrightarrow{d_s}, \overrightarrow{RS}] \neq 0$.

b) Un vector director de la recta perpendicular comú és $\overrightarrow{d_r} \times \overrightarrow{d_s} = (-13, 12, 3)$.

30) a) A, B, C formen un triangle $\Leftrightarrow \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ són linealment independents $\Leftrightarrow \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ no són proporcionals.

b) Equació del pla determinat pels tres punts: $\pi : -4x + y + 3z + 2 = 0$.
Intersecció del pla amb l'eix X:
$$\left.\begin{array}{r} y = z = 0 \\ -4x + y + 3z + 2 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow (\tfrac{1}{2}, 0, 0).$$
Intersecció del pla amb l'eix Y:
$$\left.\begin{array}{r} x = z = 0 \\ -4x + y + 3z + 2 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow (0, -2, 0).$$
Intersecció del pla amb l'eix Z:
$$\left.\begin{array}{r} x = y = 0 \\ -4x + y + 3z + 2 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow (0, 0, -\tfrac{2}{3}).$$

31) La projecció ortogonal del punt sobre el pla és $\left(\frac{1}{3}, \frac{4}{3}, \frac{2}{3}\right)$.

32) La projecció ortogonal del punt sobre la recta és $\left(\frac{1}{2}, 2, \frac{1}{2}\right)$.

33) Recta que passa per B i C, $r_1 : (x, y, z) = (2, 0, 0) + \lambda(-1, 1, 1)$.
Pla perpendicular a r_1 que passa per A, $\pi_1 : -x + y + z - 1 = 0$.
Anàlogament, $\pi_2 : x + y - 2 = 0$.
Anàlogament, $\pi_3 : 2x - z - 1 = 0$.
La intersecció dels tres plans anteriors és la recta, $(x, y, z) = (0, 2, -1) + \lambda(1, -1, 2)$.

34) a) L'equació del pla és $-x - y + z = 0$.

b) L'equació de la recta és $(x, y, z) = (1, 1, 1) + \lambda(-1, -1, 1)$.

35) La recta és $(x, y, z) = (2, -1, 1) + \lambda(11, -1, -16)$.

36) Els dos punts es corresponen amb els valors del paràmetre $\lambda = \frac{2 \pm \sqrt{3}}{4}$.

37) La distància entre les dues diagonals és de $\sqrt{\frac{1}{6}}$ dm.

38) La recta és $(x, y, z) = (0, 2, -1) + \lambda(12, -5, -6)$.

39) Si $k \neq -\frac{1}{2}$ i $k \neq -3$, les rectes es creuen.
Si $k = -\frac{1}{2}$, les rectes són paral·leles.
Si $k = -3$, les rectes es tallen en un punt.

40) L'equació del pla és $3x + y + z - 3 = 0$.
La distància al pla des de l'origen de coordenades és de $\frac{4}{\sqrt{11}}$ unitats de longitud.

41) La recta és $(x, y, z) = \left(\frac{5}{2}, \frac{5}{2}, \frac{5}{2}\right) + \lambda\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 0\right)$.

42) Si $k \neq 0$ els plans es tallen en una recta.
Si $k = 0$, els plans són paral·lels (no coincidents).
La recta d'intersecció en el cas $k = -1$ és $\frac{x+1/2}{-3/4} = \frac{y+1/2}{-5/4} = \frac{z}{1}$.

43) a) L'equació del pla és $2x + 3y + 6z - 6 = 0$.

b) L'equació de la recta és $(x, y, z) = \lambda(2, 3, 6)$.

c) El punt és $\left(\frac{12}{49}, \frac{18}{49}, \frac{36}{49}\right)$.

44) La distància és de $\sqrt{18}$ unitats de longitud.