IES CTEIB

Departament de Matemàtiques

Matemàtiques Aplicades a les Ciències Socials II

Problemes proposats en les PAU

José Luis Bernal Garcías
Pilar Garau Casasnovas
Miquel Corró Moyà
Juan Carlos Sánchez Crespillo

Curs 2016-17

Índex

Capítol 1

Àlgebra lineal

1.1 Enunciats

1) **[2016JunA1]**

   Considerau el següent sistema d'equacions depenent del paràmetre m

$$\left.\begin{aligned} x + my + z &= 1 \\ 3x + 2y + z &= -1 \\ mx + y - z &= -1 \end{aligned}\right\}.$$

   a) Discutiu per a quins valors de m el sistema té solució.
   b) Resoleu-lo, si és possible, quan $m = 1$.

2) **[2016JunB1]**

   Considerau les matriu següents, on x, y, z denoten tres nombres reals a determinar: $A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 1 \\ y+x & 7 & 7 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & x+y & 1 \\ 3 & x+y+z & x+y+z \end{pmatrix}$.

   a) Determinau els valors de x, y, z de manera que $A = B$.
   b) És possible el càlcul de $A \cdot B$? Raonau la resposta.
   c) Donau un exemple de cadascuna de les següents matrius: una matriu identitat, una matriu simètrica i una matriu diagonal que no sigui la matriu unitat.

3) **[2016SetA1]**

   a) Donades les matrius $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ i $B = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$, resoleu l'equació matricial $AX + B^t = B$, on X és una matriu quadrada d'ordre 2 i B^t és la matriu transposada de la matriu B.
   b) Donau un exemple de les matrius següents:
      i) Una matriu fila amb tres columnes.
      ii) Una matriu columna amb tres files.
      iii) Una matriu de dimensions 3×2.
      iv) Una matriu simètrica de dimensions 3×3.

4) **[2016SetB1]**

   Considerau la matriu

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & m & -1 \\ 1 & 1 & -m \end{pmatrix}.$$

   a) Determinau per a quins valors del paràmetre m existeix A^{-1}.
   b) Calculau A^{-1} per a $m = 2$.

c) Resoleu, per a $m = 2$, el sistema

$$A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

5) **[2015JunA1]**

a) Tres ciclistes C_1, C_2 i C_3 surten a entrenar-se. Per cada quilòmetre que recorre C_1, C_2 recorre 2 quilòmetres i C_3 recorre les tres quartes parts del que recorre C_2. Al final, la suma de les distàncies recorregudes pels tres ciclistes és de 180 quilòmetres. Quants quilòmetres recorre cada un?

b) Determinau les matrius $A = \begin{pmatrix} 2 & b \\ a & 4 \end{pmatrix}$ tals que $A + A^t = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}$, on A^t és la matriu transposada de A.

6) **[2015JunB1]**

a) Determinau tres nombres A, B i C tals que la seva suma sigui 210, la meitat de la suma del primer i de l'últim més la quarta part de l'altre sigui 95, i la mitjana dels dos últims sigui 80.

b) Determinau la forma de les matrius $A = \begin{pmatrix} -a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$ perquè no admetin inversa. Escriviu algun exemple particular d'aquestes matrius.

7) **[2015SetA1]**

a) Comprovau si la inversa de la matriu $A = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$ coincideix amb la seva transposada.

b) Determinau, en els casos en què sigui possible, les solucions del sistema d'equacions

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & k & 1 \\ 0 & 1 & k/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

8) **[2015SetB1]**

a) En una ebenisteria produeixen cadires, taules i armaris a raó d'un total de 350 peces/més. Les hores de mà d'obra invertides són 2 hores per cadira, 3 hores per taula i 5 hores per armari, i s'utilitza 1 planxa de fusta per cadira, 2 planxes per taula i 3 planxes per armari. Si es disposa d'un total de 1.050 hores i de 625 planxes de fusta al mes, quantes unitats de cada moble poden fabricar en aquest temps?

b) Determinau el valor de a que fa que la matriu $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & a \end{pmatrix}$ no tingui inversa.

9) **[2014JunA1]**

a) Donada la matriu $A = \begin{pmatrix} 2 & a \\ -1 & b \end{pmatrix}$, determinau els valors de a i b de manera que la matriu A verifiqui $A^2 = A$.

b) Donada la matriu $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, calculau la matriu X perquè es compleixi l'equació matricial $A \cdot X - 2I = O$, on I és la matriu identitat i O la matriu nul·la.

10) **[2014JunB1]**

Una multinacional té tres delegacions, una a Palma, una altra a Ciutadella i l'última a Eivissa. El nombre total d'alts executius de les tres delegacions ascendeix a 31. Perquè el nombre d'alts executius de la delegació de Ciutadella fos igual al de Palma haurien de traslladar-se 3 executius de Palma a Ciutadella. A més, el nombre de la de Palma excedeix en 1 la suma dels destinats a les altres dues delegacions. Quants alts executius estan destinats a cada delegació.

11) **[2014SetA1]**

Considerau el sistema d'equacions donat per

$$\left.\begin{aligned} kx + y - z &= 1 \\ x - ky + z &= 4 \\ x + y + kz &= 0 \end{aligned}\right\}.$$

a) Discutiu el sistema en funció del paràmetre k.

b) Resoleu-lo quan $k = 1$.

12) **[2014SetB1]**

La suma de les edats de tres germans d'edats diferents és de 37 anys. La suma de l'edat del major més el doble de l'edat del mitjà més el triple de l'edat del petit és de 69 anys. L'edat del germà mitjà excedeix en 2 anys l'edat del petit. Calcula les edats dels tres germans.

13) **[2013JunA1]**

a) Donada la matriu $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ calculau, si és possible, la seva matriu inversa, A^{-1}.

b) Donades la matriu $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ i la matriu $B = \begin{pmatrix} 7 & 2 \\ 11 & 5 \end{pmatrix}$ resoleu l'equació matricial $X \cdot A = B$.

14) **[2013JunB1]**

Considerau el següent sistema d'equacions en forma matricial:

$$\begin{pmatrix} 1 & k & 1 \\ 0 & 2 & k \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Es demana:

a) Discutir-lo en funció del paràmetre k.

b) Resoldre'l, justificant si és o no possible, per a $k = 4$.

c) Resoldre'l, justificant si és o no possible, per a $k = 1$.

15) **[2013SetA1]**

Donada la matriu $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$:

a) Calculau, si és possible, la seva matriu inversa, A^{-1}.

b) Calculau la matriu M perquè es compleixi l'equació matricial $A \cdot M = 2I$, on I és la matriu identitat.

16) **[2013SetB1]**

Considerau el següent sistema d'equacions en forma matricial:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ k & 1 & -3 \\ 1 & k & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \\ 8 \end{pmatrix}.$$

Es demana:

a) Per a quins valors del paràmetre k és el sistema compatible determinat?

b) Té solució el sistema quan $k = -9$? Explicau-ho.

c) Resoldre'l, justificant si és o no possible, per a $k = 0$.

17) **[2012JunA1]**

a) Una mestressa de casa va adquirir en el mercat certes quantitats de patates, pomes i taronges a un preu de $0,60$ €, $0,72$ € i $0,91$ € el quilo, respectivament. L'import total de la compra va ser de 7 € i el pes total 9 kg. A més, comprà 1 kg més de taronges que de pomes.

i) Plantejau un sistema per determinar la quantitat comprada de cada producte.

ii) Resoleu el sistema.

b) De les matrius de la forma $A = \begin{pmatrix} a & 2 \\ 1 & a-1 \end{pmatrix}$, quines són les que admeten inversa?

18) **[2012JunB1]**

Considerau el següent sistema d'equacions depenent del paràmetre m

$$\left.\begin{aligned} x - y + z &= 4 \\ mx + y - 3z &= 8 \\ x + my + 7z &= 8 \end{aligned}\right\} .$$

a) Per a quins valors de m és el sistema compatible determinat?

b) Si $m = -9$, té solució el sistema?

c) Quina és la solució quan $m = 1$?

19) **[2012SetA1]**

a) Un estudiant va obtenir, en un control que constava de 3 preguntes, un total de 8 punts. En la segona pregunta va treure dos punts més que en la primera i un punt menys que en la tercera.

i) Plantejau un sistema d'equacions per determinar la puntuació obtinguda en cadascuna de les preguntes.

ii) Resoleu el sistema.

b) Determinau els valors de k per als quals la matriu $A = \begin{pmatrix} k & 1 & 0 \\ k & k & k \\ 0 & 1 & k \end{pmatrix}$ no admet inversa.

20) **[2012SetB1]**

Considerau el següent sistema d'equacions depenent del paràmetre k

$$\left.\begin{aligned} x + ky + z &= 1 \\ 2y + kz &= 2 \\ x + y + z &= 1 \end{aligned}\right\} .$$

a) Discutiu-lo.

b) Resoleu-lo per als valors de k que el fan compatible indeterminat.

c) Quant val la solució per a $k = 3$?

21) **[2011JunA1]**

Considerau el sistema d'equacions en forma matricial $A \cdot X = 0$, on

$$A = \begin{pmatrix} m & -1 & 4 \\ 3 & m & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \qquad i \qquad 0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

a) Determinau per a quins valors de m la matriu A no té inversa.

b) Calculau, si és que és possible, la inversa de A quan $m = 0$.

c) Determinau les solucions del sistema $A \cdot X = 0$ quan $m = 0$.

22) **[2011JunB1]**

Una nació importa 21.000 vehicles mensuals de les marques X, Y, Z, al preu de 1.2, 1.5 i 2 milions d'euros, respectivament. Si el total de la importació ascendeix a 33.200 milions, i de la marca X s'importa el 40% de la suma de les altres dues marques,quants vehicles de cada marca entren al país?

23) **[2011SetA1]**

Considerau el següent sistema d'equacions depenent del paràmetre m

$$\left.\begin{aligned} x + 2y - 2z &= 6 \\ x - y + 2z &= 0 \\ 3x + 2y + mz &= 5 \end{aligned}\right\} .$$

a) Discutiu-lo.

b) Resoleu-lo per als valors de m que el fan compatible determinat.

24) **[2011SetB1]**

Un grup de persones es reuneixen per fer la ruta dels patis pel centre de la ciutat de Palma, i s'ajunten un total de 80 persones, entre homes, dones i nins. Comptant homes i dones junts, el seu nombre resulta que és el triple del nombre de nins. A més, si hi haguessin acudit dues dones més, el seu nombre igualaria el d'homes.

a) Plantejau un sistema d'equacions per esbrinar quants homes, dones i nins han anat a fer la ruta dels patis.

b) Resoleu el sistema d'equacions i, per tant, el problema.

25) **[2010JunA1]**

La suma de les tres xifres d'un determinat nombre és 13. La xifra de les centenes excedeix en 4 unitats la de les desenes. Si s'intercanvia la xifra de les unitats amb la de les centenes, el nombre augmenta en 495 unitats. De quin nombre es tracta?

26) **[2010JunB3]**

Considerau el següent sistema d'equacions depenent del paràmetre m

$$\left.\begin{array}{r} 2x+y-z=-3 \\ x-2y+2z=1 \\ 2x+y+mz=5 \end{array}\right\}.$$

a) Discutiu-lo.

b) Resoleu-lo per als valors de m que el fan compatible determinat.

c) Quant val la solució per a $m=4$?

27) **[2010SetA1]**

Considerau el sistema d'equacions

$$\left.\begin{array}{r} x=1 \\ -x+2y+3z=2 \\ y+2z=3 \end{array}\right\}.$$

a) Expressau-lo en forma matricial $A \cdot X = B$, on A és la matriu del sistema, X la matriu d'incògnites i B la matriu dels termes independents.

b) Calculau la matriu inversa de A, A^{-1}.

c) Resoleu l'equació matricial $A \cdot X = B$.

28) **[2010SetB1]**

Les altures de tres nins que es diuen Marc, Pau i Navarro estan relacionades com segueix. Si l'altura d'en Marc augmenta el triple de la diferència de les altures d'en Pau i d'en Navarro, en Marc seria igual d'alt que en Navarro. Les altures dels tres sumen 515 centímetres. Vuit vegades l'altura d'en Pau equival a nou vegades l'altura d'en Marc.

a) Plantejau un sistema d'equacions per esbrinar l'altura d'en Marc, d'en Pau i d'en Navarro.

b) Resoleu el sistema d'equacions i, per tant, el problema.

29) **[2009JunA1]**

Tres famílies se'n van a una cafeteria. La primera família pren 2 cafès, 1 tallat i 2 descafeïnats; la segona família pren 3 cafès i 2 descafeïnats; i la tercera família pren 1 cafè, 2 tallats i 2 descafeïnats. A la primera família li presenten una factura de 5.20 €, a la segona una 5 €, i a la tercera, una de 6.20 €. Hi ha qualque factura incorrecta?

30) **[2009JunB1]**

Considerau el sistema d'equacions lineals $\left.\begin{array}{r} \frac{2}{3}x-4y-4=0 \\ x-\frac{9}{2}y-3=0 \end{array}\right\}.$

a) Expressau-lo en la forma matricial $A \cdot X = B$.

b) Calculau la matriu inversa de A.

c) Resoleu-lo.

31) **[2009SetA1]**

Calculau la matriu A que satisfà

$$(I + 2A)^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},$$

on I és la matriu identitat (o unitat) d'ordre 2.

32) **[2009SetB1]**

Considerau el següent sistema d'equacions depenent del paràmetre m:

$$\left.\begin{aligned} x + y + z &= 1 \\ x - y + z &= 1 \\ -x + y - mz &= 1 \end{aligned}\right\}.$$

a) Discutiu-lo.

b) Resoleu-lo per als valors de m que el fan compatible.

33) **[2008JunA1]**

Tres famílies se'n van a una gelateria. La primera família pren 2 gelats petits i 1 de gros; la segona família en pren 2 de petits, 1 de mitjà i 1 de gros; i la tercera família en pren 1 de petit i 2 de grossos. A la primera família li cobren 4.50 €, a la segona 6.30 €, i a la tercera 5.40 €. Es denoten per x, y, z les incògnites que representen, respectivament, el preu d'un gelat petit, d'un de mitjà i d'un de gros.

a) Plantejau un sistema d'equacions per determinar el preu d'un gelat petit, el d'un gelat mitjà i el d'un gelat gros.

b) Expressau el sistema anterior en forma matricial: $A \cdot X = B$.

c) Calculau A^{-1}.

d) Resoleu l'equació matricial $A \cdot X = B$.

34) **[2008SetA1]**

Tres amics, en Joan, na Maria i en Pere, han anat a una cafeteria. En Joan ha gastat el triple que na Maria, i en Pere la meitat que na Maria.

a) Amb aquestes dades, es pt saber la quantitat que ha gastat na Maria.

b) Si a més, se sap que entre tots tres han gastat un total de 11.70 €, quina quantitat ha gastat cada un d'ells?

1.2 Solucions

1) a) $\det[A] = m^2 + m$. $\det[A] = 0 \Rightarrow m = -1, m = 0$.
$m \neq -1$ i $m \neq 0 \Rightarrow$ Sistema compatible determinat.
$m = -1 \Rightarrow$ Sistema compatible indeterminat.
$m = 0 \Rightarrow$ Sistema incompatible.

b) $m = 1 \Rightarrow (x, y, z) = (-2, 2, 1)$.

2) a) $A = B \quad \Rightarrow \quad \left.\begin{aligned} x + y = 3 \\ x + y + z = 7 \end{aligned}\right\} \quad \Rightarrow \quad x = \lambda,\ y = 3 - \lambda,\ z = 4.$

b) $A \cdot B$ no és pot fer perquè: $3 =$ nombre de columnes de $A \neq$ nombre de files de B $= 2$.

c)

3) a) $A^{-1} = \frac{1}{8}\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$.

$X = A^{-1} \cdot (B - B^t) = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -3 & -2 \end{pmatrix}$.

b)

4) a) $\det[A] = -m^2 + m + 1$.
A^{-1} existeix si i només si $m \neq \dfrac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$.

b) $A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$.

c) $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = A^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ -4 \end{pmatrix}$.

5) a) Siguin x, y, z les distàncies recorregudes pels ciclistes C_1, C_2 i C_3, respectivament.

$$\left.\begin{aligned} x + y + z = 180 \\ y = 2x \\ z = \tfrac{3}{4}y \end{aligned}\right\} \Longrightarrow \left.\begin{aligned} x + y + z = 180 \\ 2x - y = 0 \\ 3y - 4z = 0 \end{aligned}\right\} \Longrightarrow x = 40,\ y = 80,\ z = 60.$$

C_1 ha recorregut 40 km, C_2 80 km i C_3 60 km.

b) $A = \begin{pmatrix} 2 & -a \\ a & 4 \end{pmatrix}$, amb $a \in \mathbb{R}$.

6) a)

$$\left.\begin{aligned} A + B + C = 210 \\ \tfrac{A+C}{2} + \tfrac{1}{4}B = 95 \\ \tfrac{B+C}{2} = 80 \end{aligned}\right\} \Longrightarrow \left.\begin{aligned} A + B + C = 210 \\ 2A + B + 2C = 380 \\ B + C = 160 \end{aligned}\right\} \Longrightarrow A = 50,\ B = 40,\ C = 120.$$

b) $\det[A] = b^2 - a^2$.
A no té inversa $\Leftrightarrow \det[A] = 0 \Leftrightarrow b = \pm a$.
Per tant $A = \begin{pmatrix} -a & a \\ -a & a \end{pmatrix}$ ó $A = \begin{pmatrix} -a & -a \\ a & a \end{pmatrix}$ amb $a \in \mathbb{R}$.
Per exemple, si a=1 aleshores $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ i $A = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

7) a) Comprovam que $A \cdot A^t = I$ i deduïm, emprant la unicitat de la matriu inversa, que $A^{-1} = A^t$.

b) Es tracta d'un sistema homogeni.
Al menys té la solució nul·la o trivial: $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$. Per tant, és compatible.
Compatible determinat $\Leftrightarrow$ $rang(A) =$ nombre d'incògnites;
Compatible indeterminat $\Leftrightarrow$ $rang(A) <$ nombre d'incògnites.
$\det[A] = k^2 - k - 2$. $\det[A] = 0 \Rightarrow k = -1, k = 2$.
$k \neq -1$ i $k \neq 2 \Rightarrow$ Sistema compatible determinat; Solució: $(0, 0, 0)$.
$k = -1 \Rightarrow$ Sistema compatible indeterminat; Solució: $(\lambda, -\lambda, -2\lambda)$.
$k = 2 \Rightarrow$ Sistema compatible indeterminat; Solució: $(-\lambda, \lambda, -\lambda)$.

8) a) Siguin x, y, z el nombre de cadires, de taules i d'armaris fabricats en un mes.

$$\left.\begin{aligned} x + y + z = 350 \\ 2x + 3y + 5z = 1050 \\ x + 2y + 3z = 625 \end{aligned}\right\} \Longrightarrow x = 150,\ y = 125,\ z = 75.$$

Cada mes es fabricaran 150 cadires, 125 taules i 75 armaris.

b) $\det[A] = 6 - a$.
A no té inversa $\Leftrightarrow \det[A] = 0 \Leftrightarrow a = 6$.

9) a) $a = 2$, $b = -1$.

b) $X = 2 \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$.

10) Siguin x, y, z el nombre d'executius a Palma, Ciutadella i Eivissa, respectivament.

$$\left.\begin{aligned} x+y+z &= 31 \\ x-3 &= y+3 \\ x-1 &= y+z \end{aligned}\right\} \Longrightarrow \left.\begin{aligned} x+y+z &= 31 \\ x-y &= 6 \\ x-y-z &= 1 \end{aligned}\right\} \Longrightarrow x = 16,\ y = 10,\ z = 5.$$

Hi ha 16 executius a Palma, 10 a Ciutadella i 5 a Eivissa.

11) a) $\det[A] = -k^3 - 3k$. $\det[A] = 0 \Rightarrow k = 0$.
$k \neq 0 \Rightarrow$ Sistema compatible determinat.
$k = 0 \Rightarrow$ Sistema incompatible.

b) $k = 1 \Rightarrow (x, y, z) = \left(\frac{5}{2}, -2, -\frac{1}{2}\right)$.

12) Siguin x, y, z les edats del germà major, del mitjà i del petit, respectivament.

$$\left.\begin{aligned} x+y+z &= 37 \\ x+2y+3z &= 69 \\ y &= z+2 \end{aligned}\right\} \Longrightarrow x = 15,\ y = 12,\ z = 10.$$

El germà major té 15 anys, el mitjà 12 anys i el petit 10 anys.

13) a) $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$.

b) $X = B \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$.

14) a) $\det[A] = k^2 - k$. $\det[A] = 0 \Rightarrow k = 0, k = 1$.
$k \neq 0$ i $k \neq 1 \Rightarrow$ Sistema compatible determinat.
$k = 0 \Rightarrow$ Sistema incompatible.
$k = 1 \Rightarrow$ Sistema compatible indeterminat.

b) $k = 4 \Rightarrow (x, y, z) = \left(\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}\right)$.

c) $k = 1 \Rightarrow (x, y, z) = (\lambda - 1, \lambda, 2 - 2\lambda)$.

15) a) $A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

b) $M = 2 \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$.

16) a) $\det[A] = k^2 + 10k + 9$. $\det[A] = 0 \Rightarrow k = -1, k = -9$.
$k \neq -1$ i $k \neq -9 \Rightarrow$ Sistema compatible determinat.

b) $k = -9 \Rightarrow$ Sistema incompatible.

c) $k = 0 \Rightarrow$ Sistema compatible indeterminat i $(x, y, z) = \left(\frac{100}{9}, \frac{20}{3}, -\frac{4}{9}\right)$.

17) a) i) Siguin x, y, z les quantitats (en kg) de patates, pomes i taronges, respectivament.

$$\left.\begin{aligned} x+y+z &= 9 \\ 0,60x + 0,72y + 0,91z &= 7 \\ y+1 &= z \end{aligned}\right\}.$$

ii) Solució del sistema: $(x, y, z) = (2, 3, 4)$.

b) $\det[A] = a^2 - a - 2$.
A té inversa $\Leftrightarrow \det[A] \neq 0 \Leftrightarrow a \neq 2,\ a \neq -1$.

18) a) $\det[A] = m^2 + 10m + 9$. $\det[A] = 0 \Rightarrow m = -1, m = -9$.
$m \neq -1$ i $m \neq -9 \Rightarrow$ Sistema compatible determinat.

b) $m = -9 \Rightarrow$ Sistema incompatible.

c) $m = 1 \Rightarrow$ Sistema compatible indeterminat i $(x, y, z) = (6, 2, 0)$.

19) a) i) Siguin x, y, z les puntuacions de la primera, segona i tercera pregunta, respectivament.

$$\left.\begin{aligned} x+y+z &= 8 \\ y &= x+2 \\ y &= z-1 \end{aligned}\right\}.$$

ii) Solució del sistema: $(x, y, z) = (1, 3, 4)$.

b) $\det[A] = k^3 - 2k^2 = k^2(k - 2)$.
A no té inversa $\Leftrightarrow \det[A] = 0 \Leftrightarrow k = 0,\ k = 2$.

20) a) $\det[A] = k^2 - k$. $\det[A] = 0 \Rightarrow k = 0, k = 1$.
$k \neq 0$ i $k \neq 1 \Rightarrow$ Sistema compatible determinat.
$k = 0 \Rightarrow$ Sistema incompatible.
$k = 1 \Rightarrow$ Sistema compatible indeterminat.

b) $k = 1 \Rightarrow (x, y, z) = (\lambda - 1, \lambda, 2 - 2\lambda)$.

c) $k = 3 \Rightarrow$ Sistema compatible determinat i $(x, y, z) = (\frac{1}{3}, 0, \frac{2}{3})$.

21) a) $\det[A] = m^2 + 4m + 3$. $\det[A] = 0 \Rightarrow m = -1, m = -3$.
A no té inversa $\Leftrightarrow \det[A] = 0 \Leftrightarrow m = -1,\ m = -3$.

b) $A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1/3 & 0 \\ -1 & 4/3 & 4 \\ 0 & 1/3 & 1 \end{pmatrix}$.

c) Com que el sistema $A \cdot X = 0$ és un sistema homogeni amb matriu invertible, la seva solució és la trivial: $(x, y, z) = (0, 0, 0)$.

22) Siguin x, y, z el nombre de vehicles de cada una de les marques, X, Y i Z, respectivament, que entren en el país.

$$\left.\begin{aligned} x + y + z &= 21.000 \\ 1.2x + 1.5y + 2z &= 33.200 \\ x &= 0.40(y + z) \end{aligned}\right\}.$$

Solució del sistema: $(x, y, z) = (6.000, 8.000, 7.000)$.

23) a) $\det[A] = -3m - 2$. $\det[A] = 0 \Rightarrow m = -\frac{2}{3}$.
$m \neq -\frac{2}{3} \Rightarrow$ Sistema compatible determinat.
$m = -\frac{2}{3} \Rightarrow$ Sistema incompatible.

b) $m \neq -\frac{2}{3} \Rightarrow (x, y, z) = (\frac{6m+14}{3m+2}, \frac{6m-16}{3m+2}, \frac{-15}{3m+2})$.

24) Siguin x, y, z el nombre d'homes, de dones i de nins, respectivament.

$$\left.\begin{aligned} x + y + z &= 80 \\ x + y &= 3z \\ y + 2 &= x \end{aligned}\right\}.$$

Han acudit a l'excursió 31 homes, 29 dones i 20 nins.

25) El nombre és de la forma $100x + 10y + z$ i el nombre amb les xifres de les unitats i de les centenes intercanviades és de la forma $100z + 10y + x$. El sistema que permet resoldre el problema és:

$$\left.\begin{aligned} x + y + z &= 13 \\ x &= y + 4 \\ 100z + 10y + x &= 100x + 10y + z + 495 \end{aligned}\right\}.$$

Solució del sistema: $(x, y, z) = (4, 0, 9)$.
Per tant, el nombre demanat és 409.

26) a) $\det[A] = -5(m + 1)$. $\det[A] = 0 \Rightarrow m = -1$.
$m \neq -1 \Rightarrow$ Sistema compatible determinat.
$m = -1 \Rightarrow$ Sistema incompatible.

b) $m \neq -1 \Rightarrow (x, y, z) = \left(-1, \frac{7-m}{m+1}, \frac{8}{m+1}\right)$.

c) $m = 4 \Rightarrow (x, y, z) = \left(-1, \frac{3}{5}, \frac{8}{5}\right)$.

27) a) Considerem les matrius

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \qquad i \qquad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

El sistema en forma matricial queda

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

b) $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & -3 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

c) $X = A^{-1} \cdot B = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix}$.

28) a) Siguin x, y, z les edats d'en Marc, d'en Pau i d'en Navarro, respectivament. El sistema que permet resoldre el problema és:

$$\left.\begin{aligned} x + 3(y - z) &= z \\ x + y + z &= 515 \\ 8y &= 9x \end{aligned}\right\}.$$

b) L'altura d'en Marc és 160 cm; l'altura d'en Pau és 180 cm; l'altura d'en Navarro és 175 cm.

29) a) Siguin x, y, z els preus d'un cafè, d'un tallat i d'un descafeïnat, respectivament. El sistema que permet resoldre el problema és:

$$\left.\begin{aligned} 2x + y + 2z &= 5.2 \\ 3x + 2z &= 5 \\ x + 2y + 2z &= 6.2 \end{aligned}\right\}.$$

b) El sistema és incompatible (no té cap solució). Per tant, podem afirmar que hi ha qualque factura incorrecta.

30) a) Considerem les matrius

$$A = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -4 \\ 1 & -\frac{9}{2} \end{pmatrix}, \qquad X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \qquad i \qquad B = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

El sistema en forma matricial queda

$$\begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -4 \\ 1 & -\frac{9}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

b) $A^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{9}{2} & 4 \\ -1 & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$.

c) $X = A^{-1} \cdot B = \begin{pmatrix} -6 \\ -2 \end{pmatrix}$.

31) Sigui $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

$(I + 2A)^{-1} = B \quad \Rightarrow \quad I + 2A = B^{-1} \quad \Rightarrow \quad A = \frac{1}{2}(B^{-1} - I)$.

$B^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$ i $A = \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} & 0 \\ -\frac{1}{4} & 0 \end{pmatrix}$.

32) a) $\det[A] = 2(m-1)$. $\qquad \det[A] = 0 \Rightarrow m = 1$.

$m \neq 1 \Rightarrow$ Sistema compatible determinat.

$m = 1 \Rightarrow$ Sistema incompatible.

b) $m \neq 1 \Rightarrow (x, y, z) = \left(\frac{m+1}{m-1}, 0, \frac{-2}{m-1}\right)$.

33) a) El sistema que permet resoldre el problema és:

$$\left.\begin{aligned} 2x + z &= 4.5 \\ 2x + y + z &= 6.3 \\ x + 2z &= 5.4 \end{aligned}\right\}.$$

b) Considerem les matrius

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \qquad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \qquad i \qquad B = \begin{pmatrix} 4.5 \\ 6.3 \\ 5.4 \end{pmatrix}.$$

El sistema en forma matricial queda

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4.5 \\ 6.3 \\ 5.4 \end{pmatrix}.$$

c) $A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & 0 & -\frac{1}{3} \\ -1 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$.

d) $A \cdot X = B \quad \Rightarrow \quad X = A^{-1} \cdot B = \begin{pmatrix} 1.2 \\ 1.8 \\ 2.1 \end{pmatrix}$.

34) Siguin x, y, z les quantitats que han gastat en Joan, na Maria i en Pere, respectivament.

a) El sistema que permet resoldre el problema és:

$$\left.\begin{aligned} x - 3y &= 0 \\ y - 2z &= 0 \end{aligned}\right\}.$$

Com que té menys equacions que incògnites, és tracta d'un sistema compatible indeterminat.

Les solucions són $(x, y, z) = (6\lambda, 2\lambda, \lambda)$, on λ pot prendre qualsevol valor real.

Per tant, amb aquestes dades no es pot saber la quantitat que ha gastat na Maria.

b) El sistema que permet resoldre el nou problema és:

$$\left.\begin{aligned} x - 3y &= 0 \\ y - 2z &= 0 \\ x + y + z &= 11.7 \end{aligned}\right\}.$$

En Joan ha gastat 7.80 €, na Maria 2.60 € i en Pere 1.30 €.

Capítol 2

Programació lineal

S'han de plantejar com un problema de programació lineal: Determinar raonadament les restriccions del problema i la funció objectiu, representar gràficament la regió factible de solucions, calcular i dibuixar els vèrtex de la regió, evaluar la funció objectiu en cada vèrtex i finalment, determinar i escriure clarament la solució.

2.1 Enunciats

1) **[2016JunB2]**

   Es vol organitzar un pont aeri entre les illes de Mallorca i Menorca, amb places suficients de passatge i càrrega, per a transportar com a mínim 1600 persones i 96 tones d'equipatge i mercaderies. Per fer això es disposa de dos tipus d'avions, 11 de tipus A i 8 de tipus B. La contractació d'un avió de tipus A costa 4000 € i pot transportar 200 persones i 6 tones d'equipatge i mercaderies; els avions de tipues B costen 1000 € cadascun i poden transportar 100 persones i 15 tones. Quants avions de cada tipus han d'utilitzar-se perquè el cost sigui mínim?

2) **[2015JunA2]**

   a) Representau gràficament el conjunt de punts que satisfan les inequacions lineals següents:

   $$\left.\begin{aligned} 2x + y &\leq 6 \\ 4x + y &\leq 10 \\ -x + y &\leq 3 \\ x &\geq 0 \\ y &\geq 0 \end{aligned}\right\}.$$

   Indicau si és o no una regió fitada del pla. Assenyalau damunt la gràfica els vèrtex amb les seves coordenades, així com l'equació que correspon a cadascuna de les rectes que la delimiten.

   b) Calculau el màxim de la funció $f(x, y) = 4x + 2y - 3$ en el recinte anterior i indicau on s'aconsegueix.

3) **[2015JunB2]**

   a) Representau gràficament el conjunt de punts que satisfan les inequacions lineals següents:

   $$\left.\begin{aligned} x + y &\geq 2 \\ x - y &\leq 0 \\ y &\leq 4 \\ x &\geq 0 \end{aligned}\right\}.$$

   Indicau si és o no una regió fitada del pla. Assenyalau damunt la gràfica els vèrtex amb les seves coordenades, així com l'equació que correspon a cadascuna de les rectes que la delimiten.

   b) Calculau el màxim i el mínim de la funció $f(x, y) = x+y$ en el recinte anterior i indicau on s'aconsegueixen.

c) Pertany el punt $(\frac{1}{3}, \frac{4}{3})$ al recinte anterior? Justificau la resposta.

4) **[2015SetA2]**

a) Representau gràficament el conjunt de punts que satisfan les inequacions lineals següents:

$$\left.\begin{array}{r} 2x+5y \leq 50 \\ 3x+5y \leq 55 \\ 5x+2y \leq 60 \\ x+y \leq 18 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{array}\right\} .$$

Indicau si és o no una regió fitada del pla. Assenyalau damunt la gràfica els vèrtex amb les seves coordenades, així com l'equació que correspon a cadascuna de les rectes que la delimiten.

b) Indicau la posició dels punts $P = (5, 5)$ i $Q = (12, 12)$ en relació amb la regió determinada a l'apartat a). En cas que el punt sigui exterior indicau, comprovant-ho algebraicament, quina o quines de les inequacions no compleix.

c) Per a la regió representada a l'apartat a) determinau en quins punts la funció $h(x, y) = 400x+500y+1000$ pren el valor màxim.

5) **[2015SetB2]**

a) Representau gràficament el conjunt de punts que satisfan les inequacions lineals següents:

$$\left.\begin{array}{r} x+y \leq 14 \\ 2x+3y \leq 36 \\ 4x+y \geq 16 \\ x-3y \leq 0 \end{array}\right\} .$$

Indicau si és o no una regió fitada del pla. Assenyalau damunt la gràfica els vèrtex amb les seves coordenades, així com l'equació que correspon a cadascuna de les rectes que la delimiten.

b) Quines restriccions satisfan els punts $P = (0, 5)$ i $Q = (5, 15)$ i $R = (0, 15)$?

6) **[2014JunA2]**

Un agricultor estima que la cura de cada m^2 de plantació d'enciam requereix setmanalment 45 minuts, mentre que la de col n'exigeix 50. Disposa d'un terreny de 40 m^2 d'extensió que pot dedicar totalment o parcialment al cultiu de les dues verdures, però vol plantar almenys 3 m^2 més de col que d'enciam. El m^2 d'enciam li reporta un benefici de 3 €, mentre que el de col li proporciona 4 €, i planifica obtenir almenys un benefici de 60 €. Quanta extensió li interesa plantar de cada verdura si el seu objectiu és que el temps dedicat a la cura del cultiu sigui mínim?

7) **[2014JunB2]**

En un magatzem es guarden bidons d'oli de gira-sol i d'oliva. Per atendre els clients s'ha de tenir emmagatzemat un mínim de 20 bidons d'oli de gira-sol i 40 d'oli d'oliva i, a més, el nombre de bidons d'oli d'oliva no ha de ser inferior a la meitat del nombre de bidons d'oli de gira-sol. La capacitat total del magatzem és de 150 bidons. Sabent que la despesa d'emmagatzematge d'un bidó d'oli d'oliva és de 1 € i la d'un de gira-sol de 50 cèntims, quants bidons de cada tipus caldrà emmagatzemar perquè la despesa sigui mínima?

8) **[2014SetA2]**

a) Representau gràficament el conjunt de punts que satisfan les inequacions lineals següents:

$$\left.\begin{array}{r} x+4y \geq 18 \\ 3x-2y \leq 12 \\ -x-y \leq -6 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{array}\right\} .$$

Assenyalau damnunt la gràfica els vèrtex amb les seves coordenades, així com l'equació que correspon a cadascuna de les rectes que la delimiten. Indicau si és o no una regió fitada del pla.

b) Indicau la posició dels punts $P = (2, 2)$ i $Q = (5, 10)$ en relació amb la regió determinada a l'apartat a). En cas que el punt sigui exterior, indicau, comprovant-ho algebraicament, quina o quines de les inequacions no compleix.

c) Per a la regió representada a l'apartat a) determinau en quins punts agafa el valor mínim la funció $h(x, y) = 2x + 8y$.

9) **[2014SetB2]**

Una fàbrica de mobles produeix dos tipus de butaques S1 i S2. La fàbrica té dues seccions: ebenisteria i tapisseria. Fer una butaca del tipus S1 requereix 1 hora de treball a la secció d'ebenisteria i 2 hores a la de tapisseria. Una butaca del tipus S2 necessita 3 hores d'ebenisteria i 1 hora de tapisseria. El personal d'ebenisteria subministra un màxim de 90 hores de treball i en tapisseria es disposa d'un màxim de 80 hores. Els beneficis per la venda de cada butaca de S1 i de cada butaca de S2 són de 36 euros i 18 euros, respectivament. Quantes butaques de cada tipus cal produir per maximitzar els beneficis?

10) **[2013JunA2]**

Una empresa d'automòbils té dues plantes, P1 i P2, de muntatge de vehicles en les quals produeix tres models, M1, M2 i M3. De la planta P1 surten setmanalment 10 unitats del model M1, 30 del M2 i 15 del model M3; i de la planta P2, 20 unitats del model M1, 20 del M2 i 70 del M3 cada setmana. L'empresa necessita almenys 800 unitats del M1, almenys 1600 del M2 i almenys 1800 del M3. Si la despesa de manteniment de cada planta és de 36.000 € setmanals, quantes setmanes ha de funcionar cada planta perquè el cost de producció sigui mínim? Quin és el cost mínim?

11) **[2013JunB2]**

a) Representau gràficament, assenyalant els vèrtex, així com l'equació que correspon a cadascuna de les rectes que la delimiten, i indicant si és una regió fitada del plànol o no, el conjunt de punts que satisfan les equacions lineals següents:

$$\left.\begin{aligned} x + y &\geq 14 \\ 2x + 3y &\geq 36 \\ 4x + y &\geq 16 \\ x - 3y &\leq 0 \end{aligned}\right\}.$$

b) Donau un punt que no compleixi solament la inequació (2); un altre que compleixi només les restriccions (3) i (4); i un altre que no compleixi cap de les quatre restriccions. Comprovau algebraicament les condicions de cada punt.

12) **[2013SetA2]**

a) Representau gràficament, assenyalant els vèrtex, així com l'equació que correspon a cadascuna de les rectes que la delimiten, i indicant si és una regió fitada del plànol o no, el conjunt de punts que satisfan les equacions lineals següents:

$$\left.\begin{aligned} x + 2y &\leq 12 \\ 2x + y &\geq 4 \\ x - 2y &\leq 6 \\ x - y &\geq 0 \\ x &\leq 8 \end{aligned}\right\}.$$

b) Indicau la posició dels punts $P = (1, 2)$ i $Q = (5, 1)$ en relació amb la regió determinada a l'apartat a). En cas que el punt sigui exterior, indicau, comprovant-ho algebraicament, quina o quines de les inequacions no compleix.

c) Per a la regió representada a l'apartat a) determinau en quins punts agafa el valor màxim la funció $g(x, y) = 2x - 3y$.

13) **[2013SetB2]**

Una empresa té dos centres de producció, C1 i C2, en els quals fabrica tres tipus d'articles, A1, A2 i A3. Aquesta empresa ha de fabricar diàriament un mínim de 360 unitats de l'article A1, 320 del A2 i 180 del A3. La producció, per hora, en cada centre ve donada en la taula següent:

Producció	A1	A2	A3
En C1	25	30	10
En C2	30	20	18

Si cada hora de funcionament costa 480 € en C1 i 600 € en C2, quantes hores ha de funcionar cada centre perquè es redueixin al mínim els costos de producció?

14) **[2012JunB2]**

a) Representau, determinant els seus vèrtexs, el conjunt de punts que satisfan simultàniament les desigualtats:
$$2x + y \leq 6, \quad 4x + y \leq 10, \quad -x + y \leq 3, \quad x \geq 0, \quad y \geq 0.$$

b) Determinau els punts de la regió anterior el els quals la funció $F(x, y) = 4x + 2y - 7$ és màxima i aquells en què és mínima.

15) **[2012SetA2]**

a) Representau, determinant els seus vèrtexs, el conjunt de punts que satisfan simultàniament les desigualtats:
$$x - 2y \geq -1, \quad 6x - y - 5 \leq 0, \quad 5y \geq -4x - 22.$$

b) Determinau els punts de la regió anterior el els quals la funció $F(x, y) = x + y$ és màxima i aquells en què és mínima.

16) **[2012SetB2]**

Una empresa fabrica dos tipus de colònies, A i B. La primera conté un 15% d'extracte de gessamí, un 20% d'alcohol i la resta d'aigua, i la segona duu un 30% d'extracte de gessamí, un 15% d'alcohol i la resta d'aigua. Diàriament es disposa de 60 litres d'extracte de gessamí i 50 litres d'alcohol. Cada dia es poden produir com a màxim 150 litres de la colònia B. El preu de venda per litre de la colònia A és de 3 € i el de la B és de 12 €. Calculau els litres de cada tipus que poden produir-se diàriament perquè els ingressos siguin màxims.

17) **[2011JunA2]**

Un tren de mercaderies pot arrossegar com a màxim 27 vagons. En cert viatge transporta cotxes i motocicletes. Per a cotxes ha de dedicar un mínim de 12 vagons, i per a motocicletes, no menys que la meitat dels vagons dedicats a cotxes.

Si els ingressos de la companyia ferroviària són de 540 euros per cada vagó de cotxes i de 360 euros per cada vagó de motos, com s'han de distribuir els vagons per obtenir el màxim ingrés? Quin és aquest ingrés?

18) **[2011JunB2]**

Les autoritats sanitàries d'una determinada comunitat autònoma planifiquen la contractació de personal sanitari per a la posada en marxa de punts d'atenció continuada (PAC). A la comunitat hi ha dues zones clarament diferenciades, que anomenarem A i B, i cadascuna necessita una dotació específica distinta. Cada PAC de la zona A requereix 3 metges i 3 infermers/es i una inversió de 30 milions d'euros. A la zona B, cada centre necessita 2 metges i 4 infermers/es i una inversió de 10 milions d'euros. Per portar a terme tal projecte es disposa d'un màxim de 30 metges, un màxim de 48 infermers/es i un màxim de 240 milions d'euros.

a) Quin és el nombre màxim de PAC que poden posar-se en funcionament?

b) Quants en cada zona?

19) **[2011SetA2]**

Un fabricant de maquinària de construcció llança una oferta especial en dos dels seus models petits de pales carregadores: ofereix el model A a un preu de 12.000 euros i el model B a 18.000 euros. L'oferta està limitada per les existències, que són 40 unitats del model A i 20 unitats del model B, i es volen vendre almenys tantes unitats del model A com del model B. Per altra banda, per cobrir les despeses de la campanya, els ingressos obtinguts amb aquesta han de ser, almenys, de 120.000 euros.

a) Quantes unitats de cada model es podran vendre?

b) Quantes unitats s'hauran de vendre de cada model per maximitzar els ingressos?

20) **[2011SetB2]**

a) Dibuixau la regió determinada per les inequacions:

$$x \geq 0, \quad x + y \leq 50, \quad y \geq 1, \quad x \geq y, \quad 4x + 8y \geq 120.$$

b) Minimitzau la funció $F(x, y) = 2x + 3y$ sotmesa a les restriccions donades per aquestes inequacions.

21) **[2010JunB2]**

Un celler vol preparar dos tipus de lots, A i B. Cada lot del tipus A està format per 1 ampolla de vi negre, 2 de vi rosat i 1 de vi blanc; i cada lot del tipus B està format per 2 ampolles de vi negre, 1 de vi rosat i 1 de vi blanc. Amb cada lot del tipus A s'obté un benefici de 6 euros, i amb cada lot del tipus B, un de 4 euros. El celler disposa de 1.000 ampolles de vi negre, 1.000 de vi rosat i 600 de vi blanc. Quants lots de cada tipus s'han de preparar per tal d'obtenir un benefici màxim?

22) **[2010SetA2]**

Certa persona disposa de 60.000 € com a màxim per repartir entre dos tipus d'inversió A i B, sabent que el rendiment de la inversió serà del 9% en l'opció A i del 12% en la B. En l'opció A desitja invertir entre 12.000 € i 42.000 €. A més, vol destinar a aquesta opció tants de diners, almenys, com a la B.

a) Quines quantitats pot invertir en cadascuna de les opcions.

b) Quina quantitat ha d'invertir en cadascuna per optimitzar el rendiment global? A quant ascendirà?

23) **[2010SetB2]**

Dibuixau la regió determinada per les inequacions:

$$x \geq 0, \quad y \geq 0, \quad 3x + 2y \leq 30, \quad 3x + 4y \leq 48, \quad 30x + 10y \leq 240.$$

Maximitzau la funció $F(x, y) = x + y$, sotmesa a les restriccions donades per aquestes inequacions.

24) **[2009JunB6]**

Un llibreter compra llibres de dues editorials. L'editorial A ofereix un paquet de 5 novel·les de ciència ficció i 5 d'històriques per 60 €, i l'editorial B ofereix un paquet de 5 novel·les de ciència ficció i 10 d'històriques per 180 €. El llibreter vol comprar un mínim de 2.500 novel·les de ciència ficció i un mínim de 3.500 novel·les històriques. A més, per motius personals, el llibreter ha promès a l'editorial B que almenys el 25% del nombre total de paquets que comprarà seran de B.

a) Quants de paquets de cada editorial ha de comprar el llibreter per minimitzar el cost, satisfer els mínims i complir la promesa?

b) Què li costaran en total les novel·les?

25) **[2009SetB6]**

Dibuixau la regió determinada per les inequacions:

$$x \geq 0, \quad y \geq 0, \quad x + y \geq 6, \quad x + 5y \geq 10, \quad 4x + y \geq 12.$$

i minimitzau la funció $f(x, y) = 2x + 3y$ sotmesa a les restriccions donades per aquestes inequacions.

26) **[2008JunB6]**

Per Nadal una botiga vol preparar dos tipus de lots, A i B. Cada lot del tipus A està format per 4 barres de torró, 2 ampolles de cava i 2 paquets de cafè, i cada lot del tipus B està format per 2 barres de torró, dues ampolles de cava i 4 paquets de cafè. Amb cada lot del tipus A s'obté un benefici de 4.50 €, i amb cada lot del tipus B, un de 3 €. La botiga disposa de 300 barres de torró, de 180 ampolles de cava i de 300 paquets de cafè. Quants lots de cada tipus s'han de preparar per tal d'obtenir un benefici màxim?

27) **[2008SetB6]**

Un pagès ha d'adobar una finca amb adob que contingui tres ingredients nutritius: a, b i c. Els mínims que necessita són 10 unitats de a, 18 de b i 16 de c. En el mercat venen sacs d'adob de dues marques, els continguts i preus dels quals es donen a la taula següent:

Marca	Unitats de a	Unitats de b	Unitats de c	Preu del sac
I	1	1	4	10 €
II	1	3	1	9 €

a) Quants de sacs de la marca I i quants de sacs de la marca II ha de comprar el pagès per minimitzar els costs i satisfer els requeriments nutricionals?

b) Què li costaran en total?

2.2 Solucions

1) Per aconseguir que el cost sigui mínim s'han d'utilitzar 4 avions de tipus A i 8 avions de tipus B; Això suposarà un cost de 24000 €.
2) (a) La regió és fitada.
   (b) La funció f assoleix un màxim de 9 en tots els punts del segment $\overline{CD}$.
3) (a) La regió és fitada.
   (b) La funció f assoleix un màxim de 8 en el punt $D(4,4)$ i un mínim de 2 en tots els punts del segment $\overline{AB}$.
   (c) El punt no pertany a l'interval anterior perquè no verifica la primera condició.
4)
5)
6) Per aconseguir que el temps dedicat a la cura del cultiu sigui mínim, l'agricultor plantarà 15 m^2 de cols i rés d'enciams; Això li suposarà un temps de 750 minuts setmanals.
7) La despesa mínima s'assoleix amb 20 bidons d'oli de gira-sol i 40 bidons d'oli d'oliva, i és de 50 €. En canvi, la despesa màxima s'assoleix amb 20 bidons d'oli de gira-sol i 130 bidons d'oli d'oliva, i és de 20 €.
8) La regió és no fitada. El punt $P = (2,2)$ és exterior a la regió i només satisfà les dues darreres condicions. El punt $Q = (5,10)$ és interior a la regió i per tant satisfà totes les condicions. La funció h pren el valor mínim en els vèrtex $B(2,4)$ i $C(6,3)$ i val 36. Conseqüentment, la funció h pren el valor mínim en tots els punts del segment BC.
9) El benefici màxim s'assoleix en els vèrtex $B(40,0)$ i $C(30,20)$. Conseqüentment, qualsevol punt del segment BC amb coordenades enteres és solució del problema. El benefici màxim és de 1440 euros.
10) El cost mínim de producció és de 2.160.000 € i s'obté treballant 40 setmanes en la planta P1 i 20 setmanes en la planta P2.
11) La regió és no fitada. El punt $P = (10,3)$ satisfà totes les inequacions excepte la (2). El punt $Q = (4,4)$ satisfà només les condicions (3) i (4). El punt $R = (2,0)$ no satisfà cap de les restriccions.
12) La regió és fitada. El punt $P = (1,2)$ és exterior a la regió i satisfà totes les inequacions excepte la (4). El punt $Q = (5,1)$ és interior a la regió i per tant satisfà totes les condicions.
13) El cost mínim de producció és de 7056 € i s'obté tenint en funcionament 7.2 hores el centre C1 i 6 hores el centre C2.
14) Al valor màxim, què és 5, s'hi arriba en els vèrtex $B = (2,2)$ i $C = (1,4)$ de forma que a aquest valor s'hi arriba en tots els punts del segment BC. El valor mínim, que és -7, s'assoleix en el punt $E = (0,0)$.
15) El màxim s'assoleix en el vèrtex $(1,1)$ i val 2. El mínim s'assoleix en el vèrtex $(-\frac{49}{13}, -\frac{18}{13})$ i val $-\frac{67}{13}$.
16) El màxim d'ingressos és de 2.100 € i s'assoleix amb 100 unitats de tipus A i 150 unitats de tipus B.
17) Els ingressos màxims són de 12.960 euros i s'obtenen amb 18 vagos de cotxes i 9 motocicletes.
18) El nombre màxim de centres que es poden posar en funcionament és de 13; s'han de posar en funcionament 4 centres en la zona A i 9 en la B.
19) El conjunt de solucions possibles és el conjunt de solucions ENTERES que es troben en l'interior o en la frontera del conjunt factible. Els ingressos màxims ascendiran a 840.000 euros i s'obtenen de la venda de 40 cotxes del model A i 20 cotxes del model B.
20) El mínim s'assoleix en el vèrtex $(10,10)$ i val 50.
21) Els benefici màxim és 3.200 euros i s'obté preparant 400 lots del tipus A i 200 del tipus B.
22) El conjunt de solucions possibles serà el conjunt de punts de coordenades racionals amb dos xifres decimals com a màxim que es troben en l'interior o en la frontera de la regió factible. El rendiment màxim ascendeix a 6.300 € i s'assoleix invertint 30.000 € en cada tipus d'inversió.
23) La funció pren el valor màxim de 13 i s'assoleix en el punt $(4,9)$.
24) El cost mínim és de 50.400 euros i s'assoleix comprant 420 paquets de l'editorial A i 140 de la B.
25) La funció es fa mínima en el $(5,1)$; en ell la funció pren el valor $f(5,1) = 13$.
26) S'han de preparar 60 lots del tipus A i 30 del B. El benefici obtingut és de 360 euros.
27) Ha de comprar 2 sacs de la marca I i 8 de la II, amb un cost total de 92 €.

Capítol 3

Anàlisi

3.1 Enunciats

1) **[2016JunA1]**

La funció $f(x) = x^3 + ax^2 + bx$ té un extrem relatiu en $x = 2$ i un punt d'inflexió en $x = 3$. Calculau els valors de a i b, i determinau si aquest extrem és un màxim o un mínim relatiu de f.

2) **[2016JunB3]**

El benefici net, en milers d'euros, obtingut de la venda de x unitats d'un article ve donat per la funció

$$B(x) = -x^2 + 9x - 16.$$

Quina és la funció que determina el benefici net unitari? Calculau el nombre d'unitats de l'article que s'han de vendre per obtenir un benefici net per unitat màxim. Determinau aquest benefici net màxim per unitat.

3) **[2015JunA3]**

El preu d'un article, que ha estat els últims 6 anys al mercat, en funció del temps t (en anys) ha seguit la següent funció:

$$f(t) = \begin{cases} 3t^2 + 4 & \text{si } 0 \le t \le 2, \\ -2t + 20 & \text{si } 2 < t \le 6. \end{cases}$$

a) Representau la funció preu en els últims 6 anys. És contínua aquesta funció? És derivable?
b) Estudiau quan ha estat creixent i quan decreixent el preu de l'article.
c) Quin va ser el preu màxim que va aconseguir l'article? Quin és el preu actual?
d) Representau la funció derivada.

4) **[2015JunB3]**

Els beneficis (en milers d'euros) per la venda d'un producte en funció de la inversió realitzada en promoció (en milers d'euros) vénen donats per:

$$B(x) = \begin{cases} 5x + 15 & \text{si } 0 \le x \le 3, \\ -(x-3)^2 + 30 & \text{si } 3 < x \le 8. \end{cases}$$

a) És contínua aquesta funció? És derivable? Representau-la gràficament.
b) Quan creix i quan decreix la funció benefici?
c) Quan s'obtenen els beneficis mínim i màxim?
d) Representau la funció derivada.

5) **[2015SetA3]**

El nombre d'individus, en milions, d'una població, ve donat per la funció:

$$P(t) = \frac{15 + t^2}{(t+1)^2},$$

on t es mesura en anys transcorreguts des de $t = 0$. Calculau:

a) La població inicial i la població al cap de 3 anys.

b) L'any en què s'aconseguirà la mínima població. Quina serà la grandària d'aquesta població?

c) Quina serà la grandària de la població a llarg termini?

6) **[2015SetB3]**

Considerau la funció $f(x) = \dfrac{-4x}{1+x^2}$. Es demana

a) Calculau la derivada de f.

b) Resoleu l'equació $f'(x) = 0$.

c) Determinau els intervals de creixement i decreixement de f.

d) Determinau els punts màxims i mínims de f.

e) Calculau $f''(x)$ i resoleu l'equació $f''(x) = 0$. Contestau si poden existir o no punts d'inflexió.

7) **[2014JunA3]**

a) Calculau el màxim i el mínim absolut de la funció $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 1$ en l'interval $[1, 4]$.

b) Estudiau la continuïtat en l'interval $[0, 4]$ de la funció

$$f(x) = \begin{cases} 2x + 3 & \text{si } 0 \le x < 1, \\ x^3 - 6x^2 + 9x + 1 & \text{si } 1 \le x \le 4. \end{cases}$$

8) **[2014SetA3]**

Hi ha un fons d'inversió la rendibilitat del qual, en funció de la quantitat invertida en euros, ve donada per la funció

$$R(x) = \begin{cases} -0.0001x^2 + 0.5x & \text{si } 0 < x \le 4000, \\ 400 & \text{si } x \ge 4000. \end{cases}$$

a) Quina rendibilitat s'obté en invertir 3000 euros?

b) Quina quantitat x convé invertir per obtenir la màxima rendibilitat?

9) **[2014SetB3]**

Segons un estudi sobre l'evolució de la població d'una determinada espècie protegida, es pot establir que el nombre d'individus d'aquesta espècie, durant els propers anys, ve determinada per la funció

$$f(t) = \frac{50t + 500}{t + 1},$$

on t és el nombre d'anys transcorreguts.

a) Calculau la població actual i la prevista d'aquí a nou anys.

b) Determinau els períodes de temps en què la població augmentarà i els períodes en què disminuirà.

c) Estudiau si, segons la funció donada, la població tendirà a estabilitzar-se en algun valor i, en cas afirmatiu, determinau aquest valor.

10) **[2013JunA3]**

La producció de certa hortalissa en un hivernacle $I(x)$, en quilograms, depèn de la temperatura x, en graus centígrads, segons l'expressió:

$$I(x) = (x + 1)^2(32 - x).$$

a) Calculau quina és la temperatura òptima a mantenir en l'hivernacle. Raonau la resposta.

b) Quina producció s'obtindrà amb aquesta temperatura òptima?

c) Representau de forma aproximada la funció en l'interval $[-5, 25]$.

11) **[2013SetA3]**

El rendiment (mesurat de 0 a 10) d'un producte en funció del temps d'ús (x en anys) ve donat per la funció següent:

$$R(x) = 7.5 + \frac{5x}{1 + x^2}, \quad x \ge 0.$$

a) Hi ha intervals de temps on el rendiment creix? I on decreix? Quins són?

b) En quin punt s'arriba a un rendiment màxim? Quant val?

c) Per molt que passi el temps, pot arribar a ser el rendiment inferior al que el producte tenia quan era nou?

12) **[2012JunA2]**

La funció $f(x) = x^3 + px^2 + q$ té un valor mínim relatiu igual a 7 en el punt d'abscissa $x = 3$. Determinau els valors dels paràmetres p i q. Té algun valor màxim relatiu? Quant val?

13) **[2012SetA3]**

Durant els trenta dies consecutius d'un mes les accions d'una determinada companyia han tingut unes cotitzacions donades per la funció $f(x) = 0.2x^2 - 8x + 100$, on x representa el nombre de dies transcorreguts.

a) Determinau els dies que les accions varen estar de baixa (baixant de preu) i els que varen estar en alça.

b) Quin dia del mes arriben al valor màxim? I al valor mínim? Quins són aquests valors?

c) Representau gràficament la funció indicant el seu domini de definició.

14) **[2011JunA3]**

Considerau la funció $f(x) = \dfrac{x^2 - 16}{x^3 - 2x^2 - 6x - 8}$.

a) Calculau $\lim\limits_{x \to 4} f(x)$.

b) Quant ha de valer $f(4)$ perquè la funció f sigui contínua en $x = 4$?

c) Calculau f' en qualsevol punt $x \neq 4$ simplificant el resultat.

15) **[2011JunB3]**

El nombre de persones ingressades a Son Dureta per la grip A després de t setmanes ve donat per la funció

$$P(t) = \frac{350t}{2t^2 - 3t + 8}, \text{ amb } t \geq 0.$$

a) Calculau el màxim nombre de persones ingressades i la setmana en què té lloc.

b) Després d'haver arribat al màxim, a partir de quina setmana el nombre d'ingressats és més petit que 25?

16) **[2011SetA3]**

El cost de fabricació de x unitats d'un determinat producte ve donat, en unitats monetàries, per la funció

$$C(x) = \tfrac{1}{10}x^2 + 3x + 102.4.$$

Es defineix la funció cost mitjà per unitat com a $M(x) = \frac{C(x)}{x}$. Calculau el nivell de producció que minimitza el cost mitjà per unitat. Quin és aquest preu?

17) **[2011SetB3]**

Calculau a i b perquè la funció $f(x) = a \ln x + bx^2 + x$ tingui extrems relatius en $x = 1$ i en $x = 2$. Per a aquests valors de a i b, quin tipus d'extrem relatiu té la funció quan $x = 1$ i $x = 2$?

18) **[2010JunA2]**

Es vol construir una capsa rectangular sense tapa a la part superior i de base quadrada, amb 108 decímetres quadrats de material. Quines han de ser les dimensions de la capsa per tal d'obtenir-la de volum màxim?

19) **[2010JunB1]**

Considerau la funció $f(x) = x \ln \frac{x}{a}$, $a > 0$. Donau el valor de a perquè f tingui un mínim relatiu en $x = 1$.

20) **[2010SetA3]**

En una nit i el matí següent, la temperatura T (en graus centígrads) d'una certa regió varia amb el temps t segons la funció

$$T(t) = t^2 - 9t + 8, \quad 0 \leq t \leq 12.$$

a) Quina temperatura hi havia a les 2 del matí?

b) Quina va ser la temperatura màxima?

c) Quin va ser l'interval de variació de la temperatura des de les 0 hores a les 12 hores?

d) A quina hora hi va haver una temperatura de zero graus?

21) **[2010SetB3]**

Es considera la funció logística donada per

$$S(x) = \frac{1200}{1 + 30 \cdot e^{-0.9x}}.$$

Calculau, si es que existeixen:

a) Les asímptotes horitzontals.

b) Els intervals de creixement i decreixement i els màxims i mínims.

22) **[2009JunA2]**

Calculau el rectangle d'àrea màxima que té la base situada en l'eix d'abscisses i els altres dos vèrtex, amb ordenada positiva, situats en la paràbola $y = 12 - x^2$.

23) **[2009JunB3]**

La corba $y = a[4 - (x - 3)^2]$, amb $a > 0$, limita amb l'eix d'abscisses un recinte de 32 unitats de superfície. Calculau el valor de a.

24) **[2009SetA2]**

El benefici en euros de la fabricació de x unitats diàries d'un determinat producte és $-12x^2 + 1512x - 11628$.

a) Calculau el nombre d'unitats diàries que s'han de fabricar d'aquest producte per tal d'obtenir un benefici màxim.

b) Quin és aquest benefici màxim?

25) **[2009SetB3]**

Calculau l'àrea del recinte limitat per la corba $y = x^3 + x^2 - 2x$ i l'eix d'abscisses.

26) **[2008JunA2]**

De tots els rectangles de perímetre 48 m, calculau les dimensions del que té la diagonal més petita.

27) **[2008JunB1]**

Donada la funció $f(x) = 2ax + b + \frac{36}{x}$, calculau a i b de manera que la gràfica de la funció f passi pel punt $(3, 10)$ i tingui tangent horitzontal en aquest punt.

28) **[2008JunB3]**

Determinau la funció f, definida per a $x > 0$, que verifica

$$f'(x) + \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} = 0 \quad \text{i} \quad f(1) = 4.$$

29) **[2008SetA2]**

La funció de cost total de producció de x unitats d'un determinat producte és $C(x) = \frac{1}{5}x^2 + 6x + 245$. Es defineix la funció de cost mitjà per unitat com a $\overline{C}(x) = \frac{C(x)}{x}$. Calculau el nivell de producció que minimitza el cost mitjà per unitat.

30) **[2008SetB1]**

Considerau la funció $f(x) = ax^3 + x^2 + bx + 7$. Determinau els valors dels paràmetres a i b perquè la funció tingui un extrem relatiu en $x = -1$ i un altre en $x = 3$.

31) **[2008SetB3]**

Calculau l'àrea del recinte limitat per la corba $y = \frac{1}{x}$ i la recta $2x + y = 3$.

3.2 Solucions

1) a) $f(x) = x^3 - 9x^2 + 24x$.

b) f té un màxim relatiu en $x = 2$.

2) El benefici net unitari és $B_u(x) = \frac{B(x)}{x} = -x + 9 - \frac{16}{x}$.

$B'_u(x) = -1 + \frac{16}{x^2}$. $B'_u(x) = 0 \Rightarrow x = \pm 4$.

Com que no té sentit considerar la venda de $x = -4$ unitats no es tindrà en consideració.

Es comprova que en $x = 4$ la funció B_u té un màxim i que $B_u(4) = 1$.

En conseqüència, el benefici net per unitat és màxim quan es venen 4 unitats de l'article i és de 1000 euros.

3) a) Domini $= [0, 6]$. Contínua en el seu domini. Derivable en tots els punts del seu domini excepte en $x = 2$.

b)

$$f'(t) = \begin{cases} 6t & \text{si } 0 < t < 2, \\ -2 & \text{si } 2 < t < 6. \end{cases}$$

La funció és creixent en l'interval $(0, 2)$ i decreixent en l'interval $(2, 6)$.

c) El preu màxim s'aconsegueix en $x = 2$ i ve donat per $f(2) = 16$ euros. El preu actual és $f(6) = 8$ euros.

d)

4) a) Domini $= [0, 8]$. Contínua en el seu domini. Derivable en tots els punts del seu domini excepte en $x = 3$.

b)

$$B'(x) = \begin{cases} 5 & \text{si } 0 < x < 3, \\ -2(x-3) & \text{si } 3 < x < 8. \end{cases}$$

La funció és creixent en l'interval $(0, 3)$ i decreixent en l'interval $(3, 8)$.

c) El benefici màxim s'aconsegueix amb una inversió de 3.000 euros i és de 30.000 euros. El benefici mínim s'aconsegueix amb una inversió de 8.000 euros i és de 5.000 euros.

d)

5)

6)

7) a) Per trobar els extrems absoluts d'una funció $y = f(x)$ en un interval tancat $[a, b]$ hem de trobar els extrems relatius de la funció en l'interval obert (a, b) i comparar-los després amb els valors de la funció en els extrems de la funció. En el nostre cas:

$f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 1$

$f'(x) = 3x^2 - 12x + 9$. $f'(x) = 0 \Rightarrow x = 1$, $x = 3$.

$x = 1$ no és un punt de l'interval $(1, 4)$.

En quant a $x = 3$ es comprova que és un mínim relatiu de f.

Com què $f(1) = 5$, $f(3) = 1$ i $f(4) = 5$, afirmem que el màxim absolut de f en l'interval $[1, 4]$, s'assoleix en els punts $x = 1$ i $x = 4$; i que el mínim absolut s'assoleix en $x = 3$.

b) Si $x \neq 1$ la funció f és contínua perquè ve definida per funcions polinòmiques.

Es comprova que f és contínua en $x = 1$ perquè $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = f(1) = 5$.

Conseqüentment, f és continua en tots els punts de l'interval $[0, 4]$.

8) a) $R(3000) = 600$ euros.

b) Calculam la funció derivada de R:

$$R'(x) = \begin{cases} -0.0002x + 0.5 & \text{si } 0 < x < 4000, \\ 0 & \text{si } x > 4000. \end{cases}$$

$R'(x) = 0 \Rightarrow x = 2500$ euros.

Es comprova que en $x = 2500$ la funció R té un màxim relatiu.

En conseqüència, s'han d'invertir 2500 euros per tal d'assolir una rendibilitat màxima de 625 euros.

9) a) Població actual: $f(0) = 500$ individus. Població d'aquí a nou anys: $f(9) = 95$ individus.

b) $f'(t) = \dfrac{-450}{(t+1)^2}$. Com què $f'(t) < 0$ per a tot valor de t, la població disminueix sempre.

c) Com què $\lim\limits_{t \to +\infty} f(t) = 50$, deduïm que la població tendeix a estabilitzar-se en 50 individus.

10) a) Hem de trobar el valor de x per al qual la funció I assoleix un valor màxim.

$I(x) = -x^3 + 30x^2 + 63x + 32$

$I'(x) = -3x^2 + 60x + 63$. $I'(x) = 0 \Rightarrow x = -1$, $x = 21$.

$x = -1$ no té sentit: A -1°C les hortalisses es gelarien.

Es comprova que $x = 21$ és un màxim relatiu de la funció I.

Per tant, la temperatura òptima a mantenir en l'hivernacle és de 21°C.

b) $I(21) = 5.324 \quad \Rightarrow \quad$ La producció màxima d'hortalisses serà de 5.234 kg.

c)

11) a) Hem d'estudiar el creixement i decreixement de la funció R.

$R'(x) = \dfrac{5(1-x^2)}{(1+x^2)^2}$. $\quad R'(x) = 0 \Rightarrow x = \pm 1$.

Com que $x = -1$ cau fora del domini de definició de R no es tindrà en consideració.

En l'interval $(0, 1)$ el rendiment creix.

En l'interval $(1, +\infty)$ el rendiment decreix.

b) Segons l'apartat anterior, en $x = 1$ el rendiment serà màxim i el seu valor serà: $R(1) = 10$.

Per tant, el rendiment màxim possible és de 10.

c) El rendiment inicial és $R(0) = 7.5$. Durant el primer any el rendiment creix fins a 10; a partir d'aquest moment el rendiment decreix constantment. La recta $y = 7.5$ és una asímptota horitzontal de R quan x tendeix a $+\infty$, perquè

$$\lim_{x\to+\infty} R(x) = 7.5.$$

Per tant, el rendiment mai podrà ser inferior a 7.5.

12) $f(x) = x^3 - \frac{9}{2}x^2 + \frac{41}{2}$.

f té un màxim relatiu en $x = 0$ de valor $f(0) = \frac{41}{2}$.

13) Hem d'estudiar la monotonia i trobar els màxims i mínims de la funció $f(x) = 0.2x^2 - 8x + 100$ definida en l'interval $[0, 30]$.

a) f decreix en l'interval $(0, 20)$ i creix en l'interval $(20, 30)$. Per tant, les accions baixen entre el dia 0 i el dia 19, i pujen entre el dia 21 i el dia 30.

b) f pren el valor mínim en $x = 20$. Per tant, el valor mínim de les accions és dóna el dia 20 i és de $f(20) = 20$ unitats monetàries.

c) Com que f només té el valor singular $x = 20$, el valor màxim s'ha de prendre en els extrems de l'interval $[0, 30]$. Com que $f(0) = 100$ i $f(30) = 40$, el valor màxim de les accions va ser de 100 unitats monetàries i és va donar just al començament del mes.

14) a) $\lim_{x\to4} f(x) = \frac{4}{13}$

b) $f(4) = \frac{4}{13}$.

c) $f'(x) = -\frac{x^2+8x+6}{(x^2+2x+2)^2}$, que no es pot simplificar més.

15) a) Hem d'estudiar la monotonia i trobar els màxims i mínims de la funció $y = P(t)$ definida en l'interval $[0, +\infty)$.

$P'(t) = -\dfrac{700(t^2-4)}{(2t^2-3t+8)^2}$. $\quad P'(t) = 0 \Rightarrow t = \pm 2$.

Com que $t = -2$ cau fora del domini de definició de P no es tindrà en consideració.

En l'interval $(0, 2)$ P creix.

En l'interval $(2, +\infty)$ P decreix.

En conseqüència, el nombre d'ingressos és màxim després de la segona setmana; el nombre de ingressats és de $P(2) = 70$ persones.

b) $P(t) = 25 \Rightarrow t = \frac{1}{2}$, $t = 8$.

De les dues solucions, només $t = 8$ és posterior al moment en que s'arriba al màxim d'ingressos, i com que P és decreixent en l'interval $(2, +\infty)$, el nombre d'ingressats és menor que 25 després de la setmana 8.

16) El cost mitjà per unitat és $\quad M(x) = \frac{C(x)}{x} = \frac{1}{10}x + 3 + \frac{102.4}{x}$.

$M'(x) = \frac{1}{10} - \frac{102.4}{x^2}$. $\quad M'(x) = 0 \Rightarrow x = \pm 32$.

Com que no té sentit considerar una producció de $x = -32$ unitats no es tindrà en consideració.

Es comprova que en $x = 32$ la funció M té un mínim i que $M(32) = 9.4$.

En conseqüència, perquè el cost mitjà per unitat sigui mínim s'han de produir 32 unitats; per a aquesta producció el cost mitjà per unitat es de 9.4 unitats monetàries.

17) a) $f(x) = -\frac{2}{3}\ln x - \frac{1}{6}x^2 + x$.

b) f té un mínim en $x = 1$ i un màxim en $x = 2$.

18) Sigui x el costat del quadrat de la base i y l'altura de la capsa.

Hem de maximitzar la funció volum, donada per $V = x^2y$.

La superfície de la capsa (sense tapa) ve donada per l'expressió $x^2 + 4xy$. i ha de ser igual a 108 dm^2:

$$x^2 + 4xy = 108 \Rightarrow y = \tfrac{108-x^2}{4x}.$$

Substituint aquest valor en l'expressió del volum, queda:

$$V(x) = \tfrac{108x-x^3}{4}.$$

$V'(x) = \dfrac{108-3x^2}{4}$. $\quad V'(x) = 0 \Rightarrow x = \pm 6$, però no té sentit més que $x = 6$.

Es comprova que en $x = 6$ la funció V té un màxim.

Per tant, les dimensions de la capsa que fan màxim el volum són $x = 6$ i $y = 3$.

19) Ha de ser $a = e$, de forma que $f(x) = x\ln\frac{x}{e}$.

20) a) $T(2) = -6°\text{C}$.

b) $T'(t) = 2t - 9$. $\qquad T'(t) = 0 \Rightarrow t = \pm 4.5$.
Es comprova que en $t = 4.5$ f té un mínim. Per tant, la temperatura màxima s'ha d'assolir en els extrems de l'interval $[0, 12]$. Com que $T(0) = 8$ i $T(12) = 44$, la temperatura màxima s'assoleix a les 12 hores i és de 44°C.

c) L'interval de variació de la temperatura és $[T(4.5), T(12)] = [-12.25, 44]$.

d) $T(t) = 0 \Rightarrow t = 1,\ t = 8$. La temperatura és de 0°C a la 1 de la nit i a les 8 del matí.

21) a) $\lim\limits_{x\to-\infty} S(x) = 0 \Rightarrow y = 0$ és asímptota horitzontal quan x tendeix a $-\infty$.
$\lim\limits_{x\to+\infty} S(x) = 1200 \Rightarrow y = 1200$ és asímptota horitzontal quan x tendeix a $+\infty$.

b) $S'(x) = \frac{32400\cdot e^{-0.9x}}{(1+30\cdot e^{-0.9x})^2}$.
Observau que $S'(x)$ sempre pren valors positius. Per tant, S es una funció creixent en tots els punts i no té ni màxims ni mínims.

22) Observem que la paràbola és simètrica respecte de l'eix X.
Siguin $(-x, 0)$ i $(x, 0)$ les coordenades dels vèrtexs de la base, amb $x > 0$. Els altres dos vèrtexs seran $(-x, 12-x^2)$ i $(x, 12-x^2)$.
D'aquesta manera, el rectangle té una base de $2x$, una altura de $12 - x^2$ i una àrea de $2x(12 - x^2)$.
Hem de maximitzar la funció àrea, donada per $A(x) = 24x - 2x^3$, amb $x > 0$.
$A'(x) = 24 - 6x^2$. $\qquad A'(x) = 0 \Rightarrow x = 2$.
Es comprova que en $x = 2$ la funció A té un màxim relatiu.
Per tant, les dimensions del rectangle d'àrea màxima són 4 de base i 8 d'altura.

23) La gràfica de la corba $y = a[4 - (x-3)^2] = a[-x^2 + 6x - 5]$, amb $a > 0$, és una paràbola convexa.
Calculam els punts de tall de la paràbola amb l'eix X:
$$y = 0 \Rightarrow x^2 - 6x + 5 = 0 \Rightarrow x = 1,\ x = 5.$$
Com què l'àrea limitada entre la paràbola i l'eix X és de 32 unitats de superfície:
$$\int_1^5 a[-x^2 + 6x - 5]\, dx = 32.$$
Avaluant la integral arribam a l'equació $\frac{32}{3}a = 32$, d'on es dedueix que $a = 3$.

24) a) Hem de trobar el màxim relatiu de la funció $B(x) = -12x^2 + 1512x - 11628$.
$B'(x) = -24x + 1512$. $\qquad B'(x) = 0 \Rightarrow x = 63$.
Es comprova que en $x = 63$ la funció B té un màxim relatiu.
En conseqüència, s'han de fabriar 63 unitats diàries per tal d'obtenir un benefici màxim.

b) $B(63) = 36000 \Rightarrow$ El benefici màxim diari és de 36.000 €.

25) Calculam els punts de tall de la corba amb l'eix X:
$$y = 0 \Rightarrow x(x^2 + x - 2) = 0 \Rightarrow x = 0,\ x = 1,\ x = -2.$$
Hem de calcula l'àrea de dos recientes:
$$A_1 = \int_{-2}^{0} (x^3 + x^2 - 2x)\, dx = \left.\frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} - x^2\right]_{-2}^{0} = \frac{8}{3}.$$
$$A_2 = \int_{0}^{1} (x^3 + x^2 - 2x)\, dx = \left.\frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} - x^2\right]_{0}^{1} = -\frac{5}{12}.$$
L'àrea demanada és: $A = |A_1| + |A_2| = \dfrac{37}{12}$ unitats quadrades.

26) Si x representa el llarg del rectangle, l'ample serà igual a $24 - x$. Aplicant el teorema de Pitàgores, la diagonal del rectangle ve donada per l'expressió $\sqrt{x^2 + (24-x)^2}$.
Hem de minimitzar la funció $f(x) = \sqrt{x^2 + (24-x)^2}$, amb $x > 0$.
$f'(x) = \frac{2x-24}{\sqrt{x^2+(24-x)^2}}$. $\qquad f'(x) = 0 \Rightarrow x = 12$.
Es comprova que en $x = 12$ la funció f té un mínim relatiu.
Per tant, les dimensions del rectangle d'àrea màxima són $x = 12$ m i $24 - x = 12$ m, de manera que es tracta del quadrat de costat 12 m.

27) $f(x) = 4x - 14 + \frac{36}{x}$.

28) $f'(x) + \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x^2} = 0 \Rightarrow f'(x) = \dfrac{1}{x^2} - \dfrac{1}{x} \Rightarrow f(x) = \displaystyle\int \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x}\right) dx = -\frac{1}{x} - \ln x + k.$
$f(1) = 4 \Rightarrow k = 5$.
La funció és: $f(x) = -\dfrac{1}{x} - \ln x + 5$.

29) S'ha de calcular el mínim de la funció $\overline{C}(x) = \frac{1}{5}x + 6 + \frac{245}{x}$.
$\overline{C}'(x) = \frac{1}{5} - \frac{245}{x^2}$. $\qquad \overline{C}'(x) = 0 \Rightarrow x = \pm 35$.
Com que no té sentit considerar una producció de $x = -35$ unitats només considerarem $x = 35$.
Es comprova que en $x = 35$ la funció $\overline{C}'$ té un mínim.
En conseqüència, el cost mitjà per unitat serà mínim quan es produeixin 35 unitats.

30) $f(x) = \frac{1}{3}x^2 + x^2 + 3x + 7$.

31) Calculam els punts de tall de les dues corbes:

$$\frac{1}{x} = -2x + 3 \Rightarrow 2x^2 - 3x + 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{2},\, x = 1.$$

L'àrea ve donada pel valor absolut de la següent integral:

$$A = \int_{\frac{1}{2}}^{1} (-2x + 3 - \frac{1}{x})\, dx = -x^2 + 3x - \ln|x|\Big]_{\frac{1}{2}}^{1} = \frac{3}{4} + \ln\frac{1}{2}.$$

L'àrea demanada és: $|A| = \dfrac{3}{4} + \ln\dfrac{1}{2} \approx 0.0569$ unitats quadrades.

Capítol 4

Probabilitat

4.1 Enunciats

1) **[2016JunA3]**

   a) Si la probabilitat de la intersecció de dos successos independents és 0.2 i la de la seva unió és 0.7, quina és la probabilitat de cadascun dels dos successos?
   b) En un experiment se sap que $p(A) = 0.6$, $p(B) = 0.3$ i $p(A/B) = 0.1$, Calculau $p(A \cup B)$.

2) **[2015JunA4]**

   En una capsa hi ha guardats 20 rellotges, dels quals n'hi ha 15 que funcionen correctament.

   a) Representau mitjançant un diagrama en arbre la situació del problema quan s'extreuen dos rellotges a l'atzar sense reemplaçament.
   b) Si s'extreu un rellotge a l'atzar, quina és la probabilitat que funcioni bé?
   c) Si s'extreuen dos rellotges a l'atzar, sense reemplaçament, quina és la probabilitat que tots dos funcionin bé?
   d) Si s'extreuen dos rellotges a l'atzar successivament, sense reemplaçament, i el primer no funciona correctament, quina és la probabilitat que el segon tampoc no hi funcioni?

3) **[2014JunA4]**

   En cert curs de segon de batxillerat d'un IES el 72.5% dels alumnes varen aprovar Matemàtiques. Dels alumnes que varen aprovar Matemàtiques, el 70% va aprovar també Biologia. D'altra banda, el 33.3% dels que no varen aprovar Matemàtiques varen aprovar Biologia.

   a) Expressau les dades proporcionades com a probabilitats i donau un arbre que representi les dades.
   b) Quin percentatge va aconseguir aprovar ambdues assignatures alhora?
   c) Quin va ser el percentatge d'aprovats a l'assignatura de Biologia?
   d) Si un estudiant no va aprovar Biologia, quina probabilitat hi ha què aprovàs Matemàtiques?

4) **[2014JunB3]**

   Considerau dos successos A i B. Si es coneixen les probabilitats

   $$p(A) = 0.84, \quad p(B) = 0.5, \quad p(\overline{A} \cup \overline{B}) = 0.58.$$

   a) Són independents els successos A i B?
   b) Calculau la probabilitat que es compleixin B i $\overline{A}$.

5) **[2014SetA4]**

   Per celebrar el seu vint-i-cinquè aniversari, una parella planeja passar un cap de setmana gastronòmic triant a l'atzar una de les tres ciutats del País Basc: B, SS o V. No obstant això, es pronostica temps plujós durant aquests dies. En concret, les probabilitats de pluja durant el cap de setmana considerat són de 3/5, 2/7 i 1/4 a B, SS i V, respectivament.

   a) Proporcionau el diagrama en arbre associat al problema.

b) Quina és la probabilitat que no plogui durant el cap de setmana?

c) Quina és la probabilitat que la ciutat elegida sigui SS i no plogui durant la visita?

d) La parella ha tingut un cap de setmana plujós. Quina és la probabilitat que hagi estat a la ciutat B?

6) **[2014SetB4]**

Una família que fa un viatge en cotxe des de Cartagena per la Comunitat Valenciana té un 50% de possibilitats de visitar la ciutat de València, un 40% de visitar Peníscola i un 30% de visitar ambdues ciutats. Es demana:

a) La probabilitat que visiti almenys una de les dues ciutats.

b) La probabilitat que visiti València però no visiti Peníscola.

c) La probabilitat que visiti únicament una de les dues ciutats.

d) La probabilitat que visiti Peníscola, sabent que ha visitat València.

7) **[2013JunA4]**

Donats dos successos A i B se sap que

$$p(A) = 0.6, \quad p(B) = 0.3, \quad p(A \cap B) = 0.2.$$

a) Calculau $p(A/B)$ i $p(A/A \cap B)$.

b) Calculau $p(A \cup B)$, $p(A \cap B/A \cup B)$ i $p(A/A \cup B)$.

8) **[2013JunB3]**

En una determinada fàbrica d'automòbils, el 10% dels cotxes tenen defectes en el motor, el 8% tenen defectes en la carrosseria i el 4% tenen defectes en ambdós. Es demana:

a) Expressar les dades proporcionades com a probabilitats.

b) Quina és la probabilitat que un cotxe tingui almenys un defecte.

c) I la probabilitat que un cotxe no sigui defectuós?

d) Espressar i interpretar els resultats obtinguts en els apartats b) i c) en precentatge de cotxes.

9) **[2013SetA4]**

En una classe infantil hi ha 6 nines i 10 nins. Si s'escull 3 alumnes a l'atzar, calculau la probabilitat de:

a) Seleccionar tres nins.

b) Seleccionar dos nins i una nina.

c) Seleccionar un nin i dues nina.

d) Seleccionar, almenys, un nin.

10) **[2013SetB4]**

En una certa població, un 20% dels treballadors treballa en l'agricultura, un 25% en la indústria i la resta en el sector serveis. Un 63% dels que treballen en l'agricultura són més grans de 45 anys, sent aquest percentatge del 38% i el 44% en els altres dos sectors, respectivament.

a) Seleccionat un treballador a l'atzar, quina probabilitat hi ha que tingui menys de 45 anys?.

b) Si sabem que un treballador és més jove de 45 anys, quina probabilitat hi ha que procedeixi de cadascun dels sectors, industrial i serveis?.

11) **[2012JunB3]**

Tres màquines, M_1, M_2 i M_3, produeixen el 45%, 30% i 25%, respectivament, del total de les peces produïdes en una fàbrica. Els percentatges de producció defectuosa d'aquestes màquines són del 3%, 4% i 5%, respectivament.

a) Dibuixau un diagrama en arbre que descrigui el procés i que presenti la informació proporcionada.

b) Seleccionada una peça a l'atzar, resulta defectuosa; calculau la probabilitat que hagi estat produïda per la màquina M_2.

c) Quina màquina té la probabilitat més gran d'haver produït aquesta peça defectuosa?

12) **[2012JunB2]**

Siguin A i B dos successos tals que $p(A) = 0.3$, $p(B) = 0.7$ i $p(A \cap B) = 0.1$. Es demana calcular les probabilitats següents: $p(\overline{A})$, $p(\overline{A} \cap \overline{B})$, $p(\overline{A} \cup \overline{B})$, $p(A \cap \overline{B})$ i $p(A/A \cap B)$.

13) **[2012SetB3]**

Un estoig conté 15 bolígrafs de color vermell i 10 de color blau. Es demana:

a) Si en triam un a l'atzar, quina és la probabilitat que sigui de color vermell? I de color blau?

b) Si n'extraiem dos, sense reemplaçament, quina és la probabilitat que ambdós siguin blaus?

c) Si n'extraiem dos, sense reemplaçament, calcular la probabilitat que el primer sigui blau i el segon vermell.

14) **[2011JunB4]**

En una determinada universitat hi ha estudiants d'enginyeria, de ciències i de lletres. Acaben els estudis el 15% d'enginyeria, el 20% de ciències i el 35% dels estudiants lletres. Se sap que el 20% estudia enginyeria, el 30% ciències i el 50% lletres.

a) Especificau els percentatges donats com a probabilitats.

b) Prenent un estudiant a l'atzar, es demana la probabilitat que hagi acabat els estudis i sigui d'enginyeria.

c) Prenent un estudiant a l'atzar, ens diu que ha acabat els estudis. Es demana la probabilitat que sigui d'enginyeria.

15) **[2011SetA4]**

Estudis realitzats sobre les aigües dels pous d'una determinada regió han posat de manifest dues coses: D'una banda, que el 5% está infectat pel bacteri *Escherichia coli*; per una altra, que l'anàlisi d'aigua aplicada, X, diagnostica com a infectat un 96% dels que ho estan en realitat i un 1% dels que no ho estan.

Sabent que un pou d'aquesta regió triat a l'altzar ha estat diagnosticat com a infectat mitjançant l'anàlisi X, quina és la probabilitat que realment estigui infectat? I que no ho estigui?

16) **[2010JunA3]**

Una urna A conté 3 bolles blanques i 2 de negres; una altra urna B conté 4 de blanques i 1 de negra. S'elegeix una urna a l'atzar i se n'extrauen 2 bolles sense reemplaçament.

a) Calculau la probabilitat que les dues bolles extretes siguin blanques.

b) Suposant que les dues bolles extretes són blanques, calculau la probabilitat que l'urna elegida hagi estat la A.

17) **[2010SetA4]**

En una borsa tenim tres daus iguals, llevat del color de les cares. El dau D_1 té quatre cares blanques i dues de vermelles; el dau D_2 té dues cares blanques i quatre de vermelles; i el dau D_3 té tres cares blanques i tres de vermelles. És extret a l'atzar un dels tres daus i llançat a l'aire. Sabent que la cara girada cap amunt ha estat blanca, quina és la probabilitat que el dau triat hagi estat D_1? Quina la probabilitat que hagi estat triat el D_2? Quina la probabilitat que hagi estat triat D_3?

18) **[2009JunA3]**

Siguin A i B dos esdeveniments independents. La probabilitat que ocorri A és 0.4 i la probabilitat que ocorri B és 0.7.

a) Calculau la probabilitat que ocorri almenys un dels dos esdeveniments.

b) Calculau la probabilitat que ocorri l'esdeveniment A però no el B.

19) **[2009SetA3]**

En una determinada ciutat, el 20% dels habitants parla anglès, el 30% té estudis superiors, i el 15% parla anglès i té estudis superiors.

a) Calculau la probabilitat que, en elegir un habitant d'aquesta ciutat a l'atzar, ni parli anglès ni tingui estudis superiors.

b) En aquesta ciutat, són independents els esdeveniments "parlar anglès" i "tenir estudis superiors"?

20) **[2008JunA3]**

Una urna A conté 5 bolles blanques i 3 de negres; una altra urna B conté 3 de blanques i 4 de negres. S'elegeix una urna a l'atzar i se n'extrau una bolla.

a) Calculau la probabilitat que la bolla extreta sigui negra.

b) Suposant que la bolla extreta és blanca, calculau la probabilitat que l'urna elegida hagi estat la A.

21) **[2008SetA3]**

Una urna A conté 3 bolles blanques i 6 de negres; una altra urna B conté 2 de blanques i 1 de negra. S'extrau una bolla a l'atzar de l'urna A i es posa dins l'urna B. Després s'extrau de l'urna B una bolla a l'atzar.

a) Calculau la probabilitat que la bolla extreta de l'urna B sigui negra.

b) Suposant que la bolla extreta de l'urna B és negra, calculau la probabilitat que la bolla extreta de l'urna A també hagi estat negra.

22) **[2007JunA3]**

Una determinada multinacional té un 40% dels empleats que són homes i un 60% que són dones. Dels empleats d'aquesta multinacional, tenen estudis superiors un 30% dels homes i un 20% de les dones.

a) Calculau el percentatge d'empleats d'aquesta multinacional que no tenen estudis superiors.

b) Calculau la probabilitat que un empleat d'aquesta multinacional elegit a l'atzar entre els que tenen estudis superiors sigui dona.

23) **[2007SetA3]**

Una urna conté 5 bolles blanques i 3 de negres. S'extrauen tres bolles a l'atzar sense reemplaçament.

a) Calculau la probabilitat que se n'extreguin dues de blanques i una de negra.

b) Calculau la probabilitat que se n'extregui almenys una de negra.

24) **[2006JunA3]**

Una urna conté 5 bolles blanques i 3 de negres. S'extrau una bolla a l'atzar, s'observa el seu color, es descarta i es posen 2 bolles de l'altre color dins l'urna. Llavors s'extrau de l'urna una segona bolla a l'atzar. Calculau:

a) La probabilitat que la segona bolla extreta sigui negra.

b) La probabilitat que les dues bolles extretes siguin de color diferent.

25) **[2006SetA3]**

Una urna A conté 4 bolles blanques i 5 de negres; una altra urna B conté 6 de blanques i 3 de negres. S'elegeix una urna a l'atzar i se n'extrau una bolla.

a) Calculau la probabilitat que la bolla extreta sigui blanca.

b) Suposant que la bolla extreta és negra, calculau la probabilitat que l'urna elegida hagi estat la B.

26) **[2006SetA3]**

Una classe té 24 alumnes i tots ells cursen anglès i matemàtiques; 12 alumnes aproven anglès, 16 aproven matemàtiques i 4 suspenen anglès i matemàtiques.

a) Calculau la probabilitat que, en elegir un alumne d'aquesta classe a l'atzar, resulti que aprova matemàtiques i suspèn anglès.

b) En aquesta classe, són independents els esdeveniments "Aprovar anglès" i "Aprovar matemàtiques"?

27) **[2005SetA3]**

En una determinada ciutat, el 25% dels habitants parla anglès, el 40% té ordinador, i el 15% parla anglès i té ordinador.

a) Calculau la probabilitat que, en elegir un habitant d'aquesta ciutat a l'atzar, parli anglès i no tingui ordinador.

b) En aquesta ciutat, són independents els esdeveniments "parlar anglès" i "tenir ordinador"?

28) **[2004JunA3]**

Una urna A conté 5 bolles blanques i 4 de negres; una altra urna B conté 1 de blanca i 2 de negres. S'extrau una bolla a l'atzar de l'urna A i es posa dins l'urna B. Després s'extrau de l'urna B una bolla a l'atzar.

a) Calculau la probabilitat que la bolla extreta de l'urna B sigui blanca.

b) Suposant que la bolla extreta de l'urna B sigui blanca, calculau la probabilitat que la bolla extreta de l'urna A també hagi estat blanca.

29) **[2004SetA3]**

Una urna conté 6 bolles blanques i 3 de negres. S'extrau una bolla a l'atzar, es descarta i es posen 2 bolles de l'altre color dins l'urna. Llavors s'extrau de l'urna una segona bolla a l'atzar. Calculau:

a) La probabilitat que la segona bolla extreta sigui blanca.

b) La probabilitat que ambdues bolles extretes siguin del mateix color.

4.2 Solucions

1) a) A i B independents $\Rightarrow p(A \cap B) = p(A) \cdot p(B) \Rightarrow 0.2 = p(A) \cdot p(B)$.
$p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B) \Rightarrow 0.9 = p(A) + p(B)$.
Anomenant $a = p(A)$ i $b = p(B)$ hem de resoldre el sistema d'equacions:

$$\left.\begin{aligned} a \cdot b = 0.2 \\ a + b = 0.9 \end{aligned}\right\}.$$

Obtenim dues solucions: $p(A) = 0.4$ i $p(B) = 0.5$; $p(A) = 0.5$ i $p(B) = 0.4$.

b) $p(A/B) = \dfrac{p(A \cap B)}{p(B)} \Rightarrow p(A \cap B) = p(B) \cdot p(A/B) = 0.3 \cdot 0.1 = 0.03$.
$p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B) = 0.6 + 0.3 - 0.03 = 0.87$.

2) Sigui el succés
$F =$ El rellotge elegit funciona correctament;

a)

b) $p(F) = 0.75$.

c) $p(F_1 \ i \ F_2) = \dfrac{21}{38} \approx 0.5526$.

d) $p(\overline{F_2} \ / \ F_1) = \dfrac{4}{19} \approx 0.2105$.

3) Siguin els successos
$M =$ Aprova Matemàtiques;
$B =$ Aprova Biologia.

a) $p(M) = 0.725$, $p(B/M) = 0.7$, $p(B/\overline{M}) = 0.333$.

b) El 50.75% dels alumnes aprova les dues matèries.

c) Aproximadament el 59.91% dels alumnes aprova la Biologia.

d) $p(M/\overline{B}) \approx 0.5425$.

4) a) Els successos A i B són independents perquè $P(A \cap B) = p(A) \cdot p(B)$.

b) $p(\overline{A} \cap B) = 0.08$.

5) Siguin els successos
$B =$ Trien Bilbao;
$SS =$ Trien Sant Sebastià;
$V =$ Trien Vitòria;
$Plou =$ Plou durant el cap de setmana.

b) $p(\overline{Plou}) = \dfrac{87}{140}$.

c) $p(SS \cap \overline{Plou}) = \dfrac{5}{21}$.

d) $p(B/Plou) = \dfrac{84}{159}$.

6) Siguin els successos
$V =$ Visiten València;
$P =$ Visiten Peníscola.

a) $p(V \cup P) = 0.6$.

b) $p(V \cap \overline{P}) = 0.2$.

c) $p(V \cap \overline{P}) + p(\overline{V} \cap P) = 0.3$.

d) $p(P/V) = 0.6$.

7) a) $p(A/B) = \dfrac{2}{3}$; $p(A/A \cap B) = 1$.

b) $p(A \cup B) = 0.7$; $p(A \cap B/A \cup B) = \dfrac{2}{7}$; $p(A/A \cup B) = \dfrac{6}{7}$.

8) Siguin els successos
$A =$ El cotxe té defecte en el motor;
$B =$ El cotxe té defecte en la carrosseria.

a) $p(A) = 0.1$, $p(B) = 0.08$, $p(A \cap B) = 0.04$.

b) $p(A \cup B) = 0.14$.

c) $p(\overline{A \cup B}) = 0.86$.

d) L'apartat b) ens diu que almenys el 14% dels cotxes tenen almenys un defecte. L'apartat c) ens diu que el 86% dels cotxes no tenen cap defecte.

9) a) $p(\text{"Tres nins"}) = \dfrac{3}{14}$.

   b) $p(\text{"Dos nins i una nina"}) = \dfrac{27}{56}$.

   c) $p(\text{"Un nin i dues nina"}) = \dfrac{15}{56}$.

   d) $p(\text{"Almenys un nin"}) = \dfrac{27}{28}$.

10) Siguin els successos
   $A =$ Treballa en agriultura;
   $I =$ Treballa en indústria;
   $S =$ Treballa en serveis;
   $J =$ Té menys de 45 anys.

   a) $p(J) = 0.537$.

   b) $p(I/J) = 0.29$, $\quad p(S/J) = 0.57$.

11) b) $p(D) = 0.038$.

   c) $p(M_2/D) = 0.316$.

   d) $p(M_1/D) = 0.355$; $p(M_2/D) = 0.316$; $p(M_3/D) = 0.329$; La màquina amb major probabilitat d'haver produït la peça defectuosa és M_1.

12) $p(\overline{A})$=0.7, $p(\overline{A} \cap \overline{B}) = 0.1$, $p(\overline{A} \cup \overline{B}) = 0.9$, $p(A \cap \overline{B}) = 0.2$ i $p(A/A \cap B) = 1$.

13) a) $p(V) = \dfrac{15}{25}$, $\quad p(B) = \dfrac{10}{25}$.

   b) $p(B \cap B) = \dfrac{3}{20}$.

   c) $p(B \cap V) = \dfrac{1}{4}$.

14) a) $p(I) = 0.20$, $\quad p(C) = 0.30$, $\quad p(L) = 0.50$.
   $p(A/I) = 0.15$, $\quad p(A/C) = 0.20$, $\quad p(A/L) = 0.35$.

   b) $p(A \cap I) = 0.03$.

   c) $p(I/A) = 0.1132$.

15) $p(D/X) = 0.835$, $\quad p(\overline{D}/X) = 0.165$.

16) a) $p(BB) = \dfrac{9}{20}$.

   b) $p(U_A/BB) = \dfrac{1}{3}$.

17) $p(D_1/B) = \dfrac{4}{9}$, $\quad p(D_2/B) = \dfrac{2}{9}$, $\quad p(D_3/B) = \dfrac{3}{9}$.

18) a) $p(A \cup B) = 0.82$.

   b) $p(A \cap \overline{B}) = 0.12$.

19) a) $p(\overline{A} \cap \overline{S}) = 0.65$.

   b) $p(A/S) = 0.5$; $\quad p(A) = 0.2$; $\quad p(A/S) \neq p(A) \Rightarrow$ els esdeveniments A i B no són independents.

20) a) $p(Negra) = \dfrac{53}{112}$.

   b) $p(A/Blanca) = \dfrac{35}{59}$.

21) a) $p(\text{"Bolla de B és negra"}) = \dfrac{5}{12}$.

   b) $p(\text{"Bolla de A és negra" / "Bolla de B és negra"}) = \dfrac{4}{5}$.

Capítol 5

Inferència estadística

5.1 Enunciats

1) **[2016JunA4]**

Se suposa que la quantitat d'aigua (en litres) recollida cada dia en una estació meteorològica es pot aproximar per una variable aleatòria amb distribució normal de desviació típica $\sigma = 2$. Es tria una mostra aleatòria simple i s'obtenen les següents quantitats d'aigua recollides cada dia en litres:

8.8	3.8	6.5	3.6	5.5	7.5	3.5	8.9	7.9	4

a) Determinau un interval de confiança per a la quantitat mitjana d'aigua recollida cada dia a l'estació, amb un nivell de confiança del 95%.

b) Calculau la grandària mostral mínima necessària perquè en estimar la mitjana d'aigua recollida cada dia a l'estació meteorològica mitjançant la mitjana d'aquesta mostra, l'amplitud de l'interval de confiança sigui inferior a un litre, amb un nivell de confiança del 98%.

2) **[2016JunB4]**

Una empresa dedicada a l'elaboració de productes derivats del blat de moro té una determinada màquina que envasa els grans de blat de moro en bosses que segueixen una distribució normal amb $\mu = 250$ g i $\sigma = 25$ g. Les bosses s'empaqueten en capses (paquets) de 200 unitats.

a) Determinau la distribució de les mitjanes de les mostres.

b) Calculau la probabilitat que la mitjana dels pesos de les bosses d'un paquet sigui més petita que 245 g.

c) Calculau la probabilitat que una capsa de 200 bosses pesi més de 51 kg.

3) **[2015JunB4]**

L'antiguitat dels avions comercials segueix una distribució normal amb una desviació típica de $8,28$ anys.

a) S'agafa una mostra de 40 avions i l'antiguitat mitjana és de $13,41$ anys. Obteniu un interval de confiança del 90% per a l'antiguitat mitjana.

b) Quina grandària mínima haurà de tenir la mostra per obtenir un interval de confiança al 95% amb la mateixa amplitud que l'anterior?

4) **[2015SetA4]**

L'alçada mitjana dels joves de 20 anys d'un poble segueix una distribució normal de mitjana 174 cm i desviació típica 10 cm. Es tria una mostra aleatòria simple de 144 joves. Sigui $\overline{X}$ la mitjana mostral de les alçades observades.

a) Quines són la mitjana i la variància de la variable aleatòria $\overline{X}$?

b) Quina és la probabilitat que l'alçada mitjana de la mostra estigui compresa entre 173 cm i 175 cm?

5) **[2015SetB4]**

Un fabricant garanteix que la durada mínima del seu producte A és de 1.200 hores amb una desviació típica de 55 hores. Per comprovar el que diu el fabricant respecte a la durada s'ha realitzat una prova amb 81 unitats del producte i s'ha obtingut una durada mitjana de 1.191 hores. Podem acceptar que la durada mitjana del producte A és exactament la que diu el fabricant amb un nivell de significació del 8%?

6) **[2014JunB4]**

El quocient intel·lectual d'uns alumnes universitaris es distribueix normalment amb una mitjana de 100 i una desviació típica de 10.

a) Es tria una persona a l'atzar. Calculau la probabilitat que el seu quocient intel·lectual es trobi entre 98 i 103.

b) Es tria una mostra de vint-i-cinc alumnes a l'atzar. Trobau la probabilitat que la mitjana dels seus quocients intel·lectuals es trobi entre 98 i 103.

7) **[2013JunB4]**

Per a una mostra, de grandària 81, de les alumnes de segon de batxillerat es va obtenir una alçària mitjana de 167 cm. Per treballs estadístics anteriors se sap que la desviació típica de l'altura de la població de noies de segon de batxillerat és de 8 cm.

a) Determinau l'interval de confiança per a l'alçària mitjana de la població a un nivell de confiança del 90%.

b) Quin és l'error màxim que s'admet per a la mitjana poblacional en l'estimació realitzada?

8) **[2013SetB3]**

El perímetre toràcic dels individus adults (homes) d'una determinada població es distribueix segons una llei normal de mitjana 90 i desviació típica 6, en cm.

a) Com es distribueixen les mitjanes de les mostres de grandària 81 extretes d'aquesta població?

b) Quina és la probabilitat que una d'aquestes mitjanes sigui més gran que 88 cm?

c) I que sigui més gran que 91 cm?

9) **[2012JunA4]**

Un fabricant d'automòbils ha realitzat un estudi de mercat en un determinat municipi prenent una mostra de 500 turismes i ha trobat que 80 tenen un motor dièsel. Per a un nivell de confiança del 94%:

a) Determinau l'interval de confiança de la proporció de turismes que té motor dièsel en aquest municipi.

b) Quin és l'error màxim de la proporció?

10) **[2012JunB4]**

Es fa una enquesta sobre el nivell de coneixements generals dels estudiants de batxillerat de Palma. Per a això, s'ha triat una mostra aleatòria de 9 d'aquests estudiants, als quals s'ha realitzat un examen. Les qualificacions obtingudes han estat les següents:

7.8	6.5	5.4	7.1	5.0	8.3	5.6	6.6	6.2

Se suposa que la variable aleatòria objecte d'estudi segueix una distribució normal de desviació típica 1. Determinau un interval de confiança al 98% per a la mitjana de les qualificacions a l'exàmen.

11) **[2012SetA4]**

Els experts en temes electorals, basant-se en els resultats d'anteriors comicis, sostenen que, si se celebrassin en aquests moments eleccions generals, acudiria a votar com a màxim el 48% de l'electorat. No obstant això, en un sondeig electoral realitzat recentment amb una mostra de 1500 persones, 800 varen manifestar la seva intenció de votar. Contrastau amb un nivell de significació del 5% la hipòtesi establerta pels experts enfront del fet que el percentatge ha augmentat, com sembla que indiquen les dades, i explicau clarament a quina conclusió s'arriba.

12) **[2012SetB4]**

En una enquesta es pregunta a 10.000 estudiants de batxillerat sobre el consum de refrescs setmanal, i es calcula una mitjana de 5 pots i una desviació típica de 2.

a) Determinau l'interval de confiança per a la mitjana de la població a un nivell de confiança del 95%.

b) Si acceptam un error màxim de 0.25 pots per a la mitjana poblacional, i si volem un nivell de confiança del 95%, quantes persones és necessari entrevistar com a mínim?

13) **[2011JunB4]**

En una oposició en la qual participen milers de candidats es va fer un examen tipus test. La desviació típica de les qualificacions va ser de $\sigma = 10$. Si es tria una mostra de grandària 100, amb mitjana mostral de 71 punts, quin serà l'interval de confiança de la mitjana poblacional amb un nivell de confiança del 90%?

14) **[2011SetB4]**

El salari mitjà corresponent a una mostra de 1.600 persones d'una determinada població és de 1.150 euros. Se sap que la desviació típica dels salaris en la població és de 150 euros. Es pot afirmar, amb un nivell de significació de l'1%, que el salari mitjà en aquesta població és de 1.250 euros?

15) **[2010JunA4]**

En una conversa d'un bar d'una determinada població en Joan assegura que almenys el 20% dels habitants de la població porten ulleres graduades i en Pere li contesta que no ho creu. Aleshores en Pere decideix prendre una mostra aleatòria de 256 habitants de la població i resulta que 48 porten ulleres graduades. A un nivell de significació de 0.05, té en Pere suficient evidència per refutar l'afirmació d'en Joan?

16) **[2010JunB4]**

Se suposa que la vida de les bombetes que fabrica una determinada empresa segueix una distribució normal de mitjana desconeguda i desviació típica de 60 hores. Per estimar la vida mitjana es vol fer servir una mostra de mida n. Calculau el valor mínim de n per tal que, amb un nivell de confiança del 99%, l'error en l'estimació sigui menor que 10 hores.

17) **[2010SetB4]**

La regidoria de Joventut d'un ajuntament maneja la dada que l'edat a la qual els fills s'independitzen dels pares segueix una distribució normal amb mitjana 29 anys i desviació típica 3 anys. Encara que la desviació típica no planteja dubtes, sí que se sospita que la mitjana ha descendit, sobretot per la política d'ajuda a l'ocupació que ha portat a terme l'ajuntament. Així, d'un estudi recent sobre 100 joves que s'acaben d'independitzar, s'ha obtingut una mitjana de 28.1 anys d'edat. Amb un nivell de significació de l'1%, pot defensar-se que l'edat mitjana no ha disminuït, enfront de l'afirmació que sí ho ha fet, com sembla que indiquen les dades? Plantejau el contrast o test d'hipòtesi i resoleu-lo.

18) **[2009JunA4]**

Se sap que el 12% dels habitants d'una determinada ciutat pateix sobrepès. Es pren una mostra a l'atzar de 66 habitants d'aquesta ciutat. Quina és la probabilitat aproximada que almenys el 10% d'ells pateixi sobrepès?

19) **[2009JunB4]**

Es vol estimar la despesa diària mitjana en oferta complementària dels turistes, amb un error no superior a 2 euros, emprant una mostra aleatòria de 64 turistes. Sabent que la desviació típica poblacional és de 8 euros, quin serà el màxim nivell de confiança amb què es realitzarà la estimació?

20) **[2009SepA4]**

D'una mostra aleatòria de 300 estudiants de batxillerat d'una ciutat n'hi ha 60 que van regularment en bicicleta al seu centre escolar. A un nivell de significació de 0.05, hi ha suficient evidència per refutar l'afirmació que almenys el 25% dels estudiants de batxillerat de la ciutat va regularment en bicicleta al seu centre escolar?

21) **[2009SetB4]**

La vida mitjana d'una mostra presa a l'atzar de 144 bombetes de baix consum d'un determinat tipus és de 10.200 hores, i la desviació típica, de 180 hores. Calculau l'interval de confiança aproximat per a la mitjana poblacional per a un nivell de confiança del 97%.

22) **[2008JunA4]**

Per estimar la proporció d'habitatges d'una determinada ciutat que tenen aire condicionat es vol fer servir una mostra aleatòria de mida n. Calculau el valor mínim de n perquè, amb un nivell de confiança del 97%, l'error en l'estimació sigui més petit que 0.05. (Com què es desconeix la proporció, s'ha de prendre el cas més desfavorable, que és 0.5.)

23) **[2008JunB4]**

Se suposa que el pes de les llimones d'una determinada varietat segueix una distribució normal de mitjana 250 g i desviació típica 24 g. Es pren una mostra a l'atzar de 64 d'aquestes llimones i s'en calcula la mitjana. Quina és la probabilitat que aquesta mitjana sigui menor que 244 g.

24) **[2008SetA4]**

El pes mitjà d'una mostra presa a l'atzar de 196 magranes d'una determinada varietat és de 320 g i la desviació típica és de 35 g. Calculau l'interval de confiança aproximat per a la mitjana poblacional per a un nivell de confiança del 95%.

25) **[2008SetB4]**

D'una mostra aleatòria de 525 habitants d'una determinada ciutat n'hi ha 84 que tenen motocicleta. Calculau l'interval de confiança aproximat per a la proporció poblacional per a un nivell de confiança del 97%.

26) **[2007JunA4]**

Se suposa que el pes de les dones d'una determinada regió segueix una distribució normal de mitjana 64 kg i desviació típica 6 kg. Es pren una mostra a l'atzar de 144 d'aquestes dones i es calcula la seva mitjana. Quina és la probabilitat que aquesta mitjana sigui almenys 63 kg?

27) **[2007JunB4]**

D'una mostra aleatòria de 300 persones d'una determinada ciutat n'hi ha 75 que fumen. Calculau l'interval de confiança aproximat per a la proporció poblacional per a un nivell de confiança del 97%.

28) **[2007SetA4]**

L'alçada mitjana d'una mostra presa a l'atzar de 324 homes d'una determinada regió és de 171 cm, i la desviació típica, 9 cm. Calculau l'interval de confiança aproximat per a l'alçada mitjana poblacional per a un nivell de confiança del 97%.

29) **[2007SetA4]**

Per estimar la proporció dels habitatges d'una determinada gran ciutat que tenen microones es vol fer servir una mostra aleatòria de mida n. Calculau el valor mínim de n perquè, amb un nivell de confiança del 97%, l'error en l'estimació sigui més petit que 0.02. (Com què es desconeix la proporció, s'ha de prendre el cas més desfavorable, que és 0.5.)

30) **[2006JunA4]**

Se suposa que l'alçada de les alumnes universitàries d'una determinada ciutat segueix una distribució normal de mitjana 1.65 m i desviació típica 10 cm. Es pren una mostra a l'atzar de 100 d'aquestes alumnes i es calcula la seva mitjana. Quina és la probabilitat que aquesta mitjana sigui major que 1.66 m?

31) **[2006JunB4]**

D'una mostra aleatòria de 225 habitants d'una població n'hi ha 18 que parlen alemany. A un nivell de significació de 0.05, hi ha suficient evidència per refutar l'afirmació que almenys el 10% dels habitants de la població parlen alemany?

32) **[2006SetA4]**

Per estimar la proporció dels habitatges d'una determinada ciutat que tenen rentavaixelles es vol fer servir una mostra aleatòria de mida n. Calculau el valor mínim de n perquè, amb un nivell de confiança del 95%, l'error en l'estimació sigui més petit que 0.05. (Com què es desconeix la proporció, s'ha de prendre el cas més desfavorable, que és 0.5.)

33) **[2005JunA4]**

Un pagès vol estimar el pes mitjà de les taronges que produeix, amb un error menor que 10 g, emprant una mostra aleatòria de 81 taronges. Sabent que la desviació típica poblacional és de 36 g, quin serà el màxim nivell de confiança amb què realitzarà l'estimació?

34) **[2005JunB4]**

Se sap que el 10% dels habitants d'una determinada ciutat va regularment al teatre. Es pren una mostra a l'atzar de 100 habitants d'aquesta ciutat. Quina és la probabilitat aproximada que almenys el 13% d'ells vagi regularment al teatre?

35) **[2005SetA4]**

D'una mostra aleatòria de 2100 persones d'una població n'hi ha 630 que llegeixen un determinat diari. Calculau l'interval de confiança aproximat per a la proporció poblacional per a un nivell de confiança del 99%.

36) **[2005SetB4]**

El pes mitjà d'una mostra aleatòria de 400 pollastres d'una determinada granja és de 3.15 kg. Se sap que la desviació típica poblacional és de 300 g. A un nivell de significació de 0.01, hi ha suficient evidència per refutar l'afirmació que el pes mitjà poblacional és de 3.2 kg?

37) **[2004JunA4]**

El pes mitjà d'una mostra aleatòria de 100 taronges d'una determinada varietat és de 272 g. Se sap que la desviació típica poblacional és de 20 g. A un nivell de significació de 0.05, hi ha suficient evidència per refutar l'afirmació que el pes mitjà poblacional és de 275 g?

38) **[2004JunB4]**

Se suposa que la vida de les bombetes d'un determinat tipus segueix una distribució normal de mitjana 1000 hores i desviació típica 60 hores. Es pren una mostra a l'atzar de 225 d'aquestes bombetes i se'n calcula la mitjana. Quina és la probabilitat que aquesta mitjana sigui més petita que 996 hores?

39) **[2004SetA4]**

Per estimar la proporció dels habitatges d'una determinada ciutat que estan connectats a Internet es vol fer servir una mostra aleatòria de mida n. Calculau el valor mínim de n perquè, amb un nivell de confiança del 95%, l'error en l'estimació sigui més petit que 0.06. (Com què es desconeix la proporció, s'ha de prendre el cas més desfavorable, que és 0.5.)

40) **[2004SetB4]**

Se sap que el 20% dels habitants d'una determinada ciutat parla anglès. Es pren una mostra a l'atzar de 100 habitants d'aquesta ciutat. Quina és la probabilitat aproximada que almenys 16 d'ells parlin anglès?

5.2 Solucions

1) Mitjana de la mostra = 6 litres.

   a) Amb un nivell de confiança del 95% podem afirmar que la quantitat mitjana d'aigua recollida cada dia a l'estació està en l'interval $IC = (4.76, 7.27)$.

   b) La grandària mínima de la mostra és de $n = 87$ dies.

2) $X =$ distribució del pes de totes les bosses $\Rightarrow X = N(250, 25)$.

   a) Cada capsa de 200 bosses es pot considerar com una mostra de tamany $n = 200$ extreta de la població de bosses. Per tant: $\overline{X} =$ distribució del pes mitjà de les capses de 200 $\Rightarrow \overline{X} = N(\mu, \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}) = N(250, \dfrac{25}{\sqrt{200}}) = N(250, 1.7678)$.

   b) $P[\overline{X} < 245] = 0.0023$.

   c) $Y =$ distribució del pes total de les 200 bosses de cada capsa $\Rightarrow Y = \sum_{i=1}^{200} X_i = N(n\mu, \sqrt{n}\sigma) = N(50000, 353, 55)$.

   $P[Y > 51000] = 0.0023$.

3) a) Amb un nivell de confiança del 90% podem afirmar que l'antiguitat mitjana dels avions comercials (en anys) està en l'interval $IC = (11.26, 15.56)$.

   b) La grandària mínima de la mostra és $n = 57$ individus.

4) a) $\overline{X} = N(174, \frac{5}{6})$.

   b) $P[173 < \overline{X} < 175] = 0.7698$.

5) Es tracta d'un contrast d'hipòtesi bilateral per a la mitjana de la població.

   Hipòtesis nul·la i alternativa: $\begin{cases} H_0: & \mu = 1200 \text{ h;} \\ H_1: & \mu \neq 1200 \text{ h.} \end{cases}$

   Zona d'acceptació: $ZA = (1189.31, 1210.69)$.

   $\overline{x} = 1.191 \in ZA$.

   Per tant, amb un nivell de siguificació del 8%, acceptam que la duració mitjana del producte és de 1200 hores, tal i com afirma el fabricant.

6) a) El quocient intel·lectual dels alumnes d'aquesta universitat segueix una distribució $X = N(100, 10)$.
   $p(98 < X < 103) = 0.1972$.

   b) El quocient intel·lectual mitjà de totes les mostres de 25 dels alumnes d'aquesta universitat segueix una distribució $\overline{X} = N(100, 2)$.
   $p(98 < \overline{X} < 103) = 0.7745$.

7) a) Amb un nivell de confiança del 90% podem afirmar que l'alçària mitjana de la població está en l'interval $IC = (165.54, 168.46)$.

   b) L'error màxim és $E = 1.46$.

8) a) $\overline{X} = N(90, 0.67)$.

   b) $p(\overline{X} > 88) = 0.9987$.

   c) $p(\overline{X} > 91) = 0.0668$.

9) a) Amb un nivell de confiança del 94% podem afirmar que la proporció de turismes amb motor dièsel en aquest municipi está en l'interval $IC = (0.129, 0.191)$.

   b) L'error màxim és $E = 0.031$.

10) Amb un nivell de confiança del 98% podem afirmar que la mitjana de les qualificacions a l'examen está en l'interval $IC = (5.724, 7.276)$.

11) Es tracta d'un contrast d'hipòtesi unilateral per a una proporció.

   Hipòtesis nul·la i alternativa: $\begin{cases} H_0: & p \leq 0.48; \\ H_1: & p > 0.48. \end{cases}$

   Zona d'acceptació: $ZA = (-\infty, 0.5014)$.

   $\widehat{p} = 0.53 \notin ZA$.

   Per tant, rebutjam la hipòtesi nul·la H_0 i, amb una probabilitat del 5% d'equivocar-nos, afirmam que si en aquests moments es celebrassin eleccions generals aniria a votar més del 48% dels votants.

12) a) Amb un nivell de confiança del 95% podem afirmar que el consum setmanal mitjà de refrescs de tots els alumnes de batxillerat está en l'interval $IC = (4.9658, 5.0392)$.

   b) Grandària mínima de la mostra: $n \geq 246$.

13) Amb un nivell de confiança del 90% podem afirmar que la nota mitjana de tots els participants en l'oposició está en l'interval $IC = (69.355, 72.645)$.

14) Es tracta d'un contrast d'hipòtesi bilateral per a la mitjana de la població.

   Hipòtesis nul·la i alternativa: $\begin{cases} H_0: & \mu = 1250 \text{ euros;} \\ H_1: & \mu \neq 1250 \text{ euros.} \end{cases}$

   Zona d'acceptació: $ZA = (1240.344, 1259.656)$.

   $\overline{x} = 1.150 \notin ZA$.

   Per tant, rebutjam la hipòtesi nul·la H_0 i, amb una probabilitat de l'1% d'equivocar-nos, afirmam que el salari mitjà en aquesta població no és igual a 1250 euros.

15) Es tracta d'un contrast d'hipòtesi unilateral per a una proporció.

Hipòtesis nul·la i alternativa: $\begin{cases} H_0: & p \geq 0.2; \\ H_1: & p < 0.2. \end{cases}$

Zona d'acceptació: $ZA = (0.158875, +\infty)$.

$\widehat{p} = 0.1875 \in ZA$.

Per tant, acceptam la hipòtesi nul·la H_0 i, amb una probabilitat del 5% d'equivocar-nos, afirmam que en Pere no té suficient evidència per refutar l'afirmació d'en Joan.

16) Grandària mínima de la mostra: $n \geq 239$.

17) Es tracta d'un contrast d'hipòtesi unilateral per a la mitjana de la població.

Hipòtesis nul·la i alternativa: $\begin{cases} H_0: & \mu \geq 29 \text{ anys}; \\ H_1: & \mu < 29 \text{ anys}. \end{cases}$

Zona d'acceptació: $ZA = (28.301, +\infty)$.

$\overline{x} = 28.1 \notin ZA$.

Per tant, rebutjam la hipòtesi nul·la H_0 i, amb una probabilitat de l'1% d'equivocar-nos, afirmam que l'edat mitjana d'emancipació dels joves en la població considerada ha disminuït.

18) $\widehat{P} = N(0.12, 0.04)$.

$p(\widehat{P} \geq 0.1) = 0.6915$.

19) El màxim nivell de confiança és $1 - \alpha = 0.9544$ o del 95.44%.

20) Es tracta d'un contrast d'hipòtesi unilateral per a una proporció.

Hipòtesis nul·la i alternativa: $\begin{cases} H_0: & p \geq 0.25; \\ H_1: & p < 0.25. \end{cases}$

Zona d'acceptació: $ZA = (0.208875, +\infty)$.

$\widehat{p} = 0.2 \notin ZA$.

Per tant, rebutjam la hipòtesi nul·la H_0 i, amb una probabilitat del 5% d'equivocar-nos, afirmam que la proporció d'estudiants de batxillerat de la ciutat que va regularment en bicicleta al seu centre escolar és inferior al 25%.

21) Amb un nivell de confiança del 97% podem afirmar que la vida mitjana de les bombetes d'aquest tipus està en l'interval $IC = (10167.45, 10232.55)$.

Observació: Com que no coneixem σ, la substituïm per la desviació típica mostral $s = 180$ hores.

22) Grandària mínima de la mostra: $n \geq 471$.

23) $\overline{X} = N(250, 3)$.

$p(\overline{X} < 244) = 0.0228$.

24) Amb un nivell de confiança del 95% podem afirmar que el pes mitjà de les magranes d'aquesta varietat està en l'interval $IC = (315.1, 324.9)$.

Observació: Com que no coneixem σ, la substituïm per la desviació típica mostral $s = 35$ g.

25) Amb un nivell de confiança del 97% podem afirmar que la proporció d'habitants d'aquesta ciutat que tenen motocicleta està en l'interval $IC = (0.12528, 0.19472)$.